

19. Das ideale Fermi-Gas

- identische Teilchen: halbzahliger Spin
ohne WDW
- Bsp: e^- in Metallen

19.1 Extensive thermodynam. Variable

a) Zustandsdichte: $D(\varepsilon)d\varepsilon \dots$ Anzahl Zustände in $d\varepsilon$ (Kap. 15.1)

- Einteilchenzustand:

$$|i\rangle \text{ mit } i = \left(\underset{\substack{\text{magnet.} \\ \text{Spinquantenzahl}}}{m_j}, \underset{\substack{\text{Wellenvektor}}}{\frac{k}{\hbar}} \right)$$

- (i) Spin: $j \hbar$ mit $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ Spinquantenzahl
 $\rightarrow m_j = -j, -j+1, \dots, j \dots$ Einstellungen bzgl. Vorzugsrichtung
 $\rightarrow g_0 = 2j+1 \dots$ verschiedene Spinzustände

- (ii) Ebene Wellen in Vol. V mit k

Energie: $\varepsilon_i = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \dots$ Zustandsdichte s. Gl. (15.4)

$$\xrightarrow{(15.4)} \frac{g_0}{g_0} \quad D(\varepsilon) = g_0 \frac{V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} = D_0 \sqrt{\varepsilon} \quad (19.1)$$

b) Großkanonisches Potential: (18.20) mit $\sum_i \rightarrow \int \dots D(\varepsilon) d\varepsilon$

$$\rightarrow \left[\begin{aligned} \Omega &= -k_B T \int_0^\infty \ln[1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}] D(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= -k_B T D_0 \int_0^\infty \ln[1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon)}] \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon \end{aligned} \right] \quad (19.2)$$

c) Mittlere Teilchenzahl

• Erinnerung: (18.21) $N_k^{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$... mittlere Besetzungszahl

ϵ kont.

$$f(\epsilon, T, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad (19.3)$$

... Fermi-Verteilungsfkt. für einen Zustand mit Energie ϵ

also:
$$N = \int_0^\infty f(\epsilon, T, \mu) D(\epsilon) d\epsilon \stackrel{(19.2)}{=} - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right) = TD \quad (19.4)$$

mittlere Zahl von Teilchen
in Zuständen aus $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$

$$\rightarrow N(T, V, \mu) = D_0 \int_0^\infty \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} d\epsilon \quad (19.5)$$

Bem: $N = N(T, V, \mu) ! \rightarrow \mu(T, V, N)$ (im Prinzip!)

c) Innere Energie: $U = \langle \epsilon \rangle !$

$$U = \int_0^\infty \epsilon f(\epsilon, T, \mu) D(\epsilon) d\epsilon = D_0 \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} d\epsilon \quad (19.6)$$

• großes Pot.: part. Integ. von (19.6)

$$a(\epsilon) = \epsilon^{3/2} \quad b'(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} = \frac{e^{\beta(\mu - \epsilon)}}{1 + e^{\beta(\mu - \epsilon)}}$$

$$\rightarrow b(\epsilon) = -\frac{1}{\beta} \ln [e^{\beta(\mu - \epsilon)} + 1]$$

$$(19.6) \rightarrow U = D_0 \underbrace{a(\epsilon) b(\epsilon)}_{=0} \Big|_0^\infty + \underbrace{\frac{3}{2} D_0 \int_0^\infty \sqrt{\epsilon} \ln [e^{\beta(\mu - \epsilon)} + 1] d\epsilon}_{-\Omega \quad (19.2)}$$

$$\rightarrow \Omega = -\frac{2}{3} U \stackrel{TD}{=} -PV \quad (19.7)$$

$$\rightarrow P = \frac{2}{3} \frac{U}{V} \quad (19.8)$$

... Zustandsgl. für Fermigas!

NB: Wie klassisches ideales Gas: $PV = N k_B T !$ aber (19.8) ist allgemeiner!
 $\frac{2}{3} U$

19.2 Klassischer Grenzfall

- Annahme: Fugazität $e^{\beta\mu} \ll 1$ (s.u.)

$$\rightarrow f = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \xrightarrow{e^{-\beta\mu} \gg 1} e^{\beta(\mu-\varepsilon)} \quad (19.4)$$

... klass. Boltzmann Statistik

- mittlere Teilchenzahl

$$(19.5) \rightarrow \left[N \approx D_0 e^{\beta\mu} \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon = e^{\beta\mu} \frac{g_0 V}{\lambda_B^3} \right] \quad (19.9)$$

$$\frac{1}{\beta^{3/2} T^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{(k_B T)^{3/2} \sqrt{\pi}}{2} \quad \lambda_B = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \quad (19.8)$$

$\rightarrow$ Kriterium für klass. Grenzfall: $n = \frac{N}{V}$, $n_Q = \frac{1}{\lambda_B^3}$... Quanten-konz.

$$(19.9) \quad e^{\beta\mu} = \frac{1}{g_0} \frac{n}{n_Q} \ll 1 \quad (19.10) \rightarrow \text{s.o.}$$

... macht Sinn

$$\text{Bem: (1) } \mu < 0! \quad \text{aus (14.8): } \mu = \frac{2F}{\partial V} = -k_B T \left(\ln \frac{V}{V \lambda_B^3} + 1 \right)$$

$$(2) (19.10): \quad n \rightarrow 0 \text{ oder } n_Q \sim T^{3/2} \rightarrow \infty \quad \dots \text{für ideales Gas}$$

19.3 Quanten-Grenzfall: z.B. entartetes Elektr. gas

$$e^- \rightarrow g_0 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$$

& e^- Dichte: $n = \frac{N}{V}$ sei fester Parameter!

a) Fermi-Gas bei $T=0$

- Fermi-Verteilung für $T \rightarrow 0$: ($\beta \rightarrow \infty$)

$$f(\varepsilon, T, \mu) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{für } \varepsilon < \mu \\ 0 & \text{für } \varepsilon > \mu \end{cases} \quad T \rightarrow 0 \quad (19.11)$$





Bem: (1) $T=0$: alle Zustände bis $\epsilon_F = \mu_0 = \mu(T=0, V, N)$ besetzt!
darüber unbesetzt

(2) Bezeichnung: $\epsilon_F = \mu_0$... Fermienergie/-kante

• Berechnung von μ_0 :

$$N = \int_0^{\mu_0} D(\epsilon) d\epsilon \stackrel{(13.11)}{=} \frac{2V}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\mu_0} \sqrt{\epsilon} d\epsilon = \frac{V}{3\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu_0^{3/2} \quad (13.12)$$

$$\mu_0 := \epsilon_F := k_B T_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3} \sim n^{2/3}$$

Bsp: $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \rightarrow \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{k_B} = 4,23 \cdot 10^{-15} \text{ K m}^2$

typische e^- -Dichte: $n = 10^{23} \text{ cm}^{-3}$

$\rightarrow$ Fermi-Temperatur: $T_F \approx 10^5 \text{ K}$, Temp. von e^- an der Fermi-kante

• Grundzustatsenergie:

$$U(T=0) = \int_0^{\mu_0} \underbrace{\epsilon}_{\epsilon^{3/2}} D(\epsilon) d\epsilon \stackrel{(13.12)}{=} \frac{3}{5} N \mu_0 = \frac{3}{5} N k_B T_F \quad (13.14)$$

• mittlere Energie pro e^- : für $T \ll T_F$... all. temp. Temp!

$$\frac{U}{N} \approx \frac{3}{5} k_B T_F \quad (13.15)$$

Bem: anders als im klass. idealen Gas: $\frac{U}{N} = \frac{3}{2} k_B T \propto T$

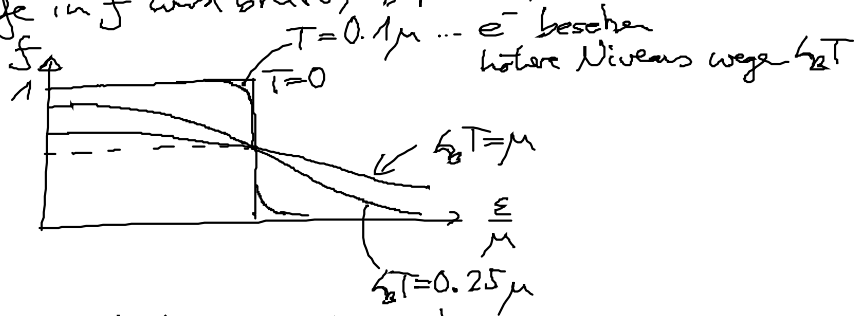
Grd: Ausschlussprinzip von e^-

= jeder Zustand nur einmal besetzbar

$\rightarrow$ Auffüllg bis ϵ_F = hoch energet. Zustand

b) Fermi-Gas bei $0 < T < T_F$

- Stufe in f wird breiter, "punkt-symmetrisch" zu $\varepsilon = \mu$ mit $f = \frac{1}{2}$



- chem. Potential: $\mu = \mu(T, V, N)$:

$$N = \int_0^\infty f(\varepsilon, T, \mu) D(\varepsilon) d\varepsilon = N(T, V, \mu) \rightarrow \mu = \mu(T, \frac{N}{V} = n)$$

Entw. nach $\frac{T}{T_F}$ genau so

$$\mu(T) = \mu_0 \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (19.16)$$

$$U(T) = \frac{3}{5} N \mu_0 \left[1 + \frac{5\pi^2}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \dots \right] \quad (19.17)$$

Bem: (1) ohne Beweis
(2) $\mu \downarrow$ mit $T \uparrow$

c) Spezifische Wärme

- direkte Berechnung:

$$C_{V,N} = \frac{1}{N} \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_{V,N} \stackrel{(19.17)}{=} \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{T_F} + O\left(\left(\frac{T}{T_F}\right)^3\right) \sim T \quad (19.18)$$

- alternative Berechnung:

(1) Betrachte:

$$U(T, V, \mu) - \underbrace{\mu_0 N}_{\text{Landau}} = \int_0^\infty (\varepsilon - \mu_0) f(\varepsilon, T, \mu) D(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$(2) C_{V,N} = \frac{1}{N} \frac{\partial (U - \mu_0 N)}{\partial T} = \frac{1}{N} \int (\varepsilon - \mu_0) \frac{\partial f}{\partial T} D(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$\rightarrow \text{nur bei } \varepsilon \approx \mu_0: \frac{\partial f}{\partial T} \neq 0$$

$$\rightarrow D(\varepsilon) \approx D(\mu_0)$$



$$(3) \text{ also: } C_{V,N} = \frac{D(\mu_0)}{N} \int_0^\infty (\varepsilon - \mu_0) \underbrace{\frac{\varepsilon - \mu_0}{k_B T^2} \frac{e^{(\varepsilon - \mu_0)/k_B T}}{[e^{(\varepsilon - \mu_0)/k_B T} + 1]^2}}_{\sim 1} d\varepsilon$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial T}$$

$$\text{mit } x = \frac{\epsilon - \mu_0}{k_B T}$$

$$x_{\min} = -\frac{\mu_0}{k_B T} = -\frac{T_F}{T} \ll -1 \rightarrow x_{\min} \approx -\infty$$

$$\rightarrow C_{V,N} \approx \frac{1}{2} k_B T \frac{D(\mu_0)}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{3} \frac{D(\mu_0)}{N} k_B^2 T$$

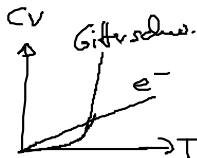
$$= \frac{\pi^2}{3} (o.B.)$$

$$\frac{(13.1) D(\mu_0)}{(13.12) N(\mu_0)}$$

$$C_{V,N} \approx \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{T_F} \sim T \quad (13.13) \quad (s.o.)$$

Bem: (1) Eigenschaften des e^- -Gases hängen nur von Fermi-Energie ab! Nur hier werden e^- angeregt!

(2) elektron. Beitrag zu $C_V \sim T$ (gilt $\forall T \ll T_F$, also „immer“)



(3) vgl. Gitterschwingungen $C_V \sim T^3$

$\rightarrow$ bei niedrigen Temp. ist e^- -Beitrag dominiert