18.2 Exakte Statistik ununterscheidbarer und nicht wechselwirkender Teilchen

⋮

d) Typen ununterscheidbarer Teilchen:

Vielteilchen-QM → Bosonen: viele Teilchen im Einzelzustand
→ Fermionen: maximal ein Teilchen " "

18.3 Bose-Einstein-Statistik

a) Vielteilchenzustand:

- Bose-Teilchen / Bosonen: ganzzahliger Spin

  Bsp: Mesonen (Kaonen & Pionen), ^{4}He-Atome, Cooper-Paare, Photonen ($S=1$), Phononen ($S=0$), intermediäre Vektor Bosonen ($W^\pm, Z^0$)

- ν-Teilchenzustand in QM: mit $|i_k\rangle^{(k)}$ ... Teilchen k im Einteilchenzustand i_k

$$\boxed{\begin{aligned} |s(\nu)\rangle &= |n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \dots, n_k^{(\nu)} \dots\rangle \\ &= \left[\frac{\nu!}{n_1^{(\nu)}!\, n_2^{(\nu)}! \dots n_k^{(\nu)}! \dots}\right]^{1/2} S\, |i_1\rangle^{(1)} |i_2\rangle^{(2)} \dots |i_\nu\rangle^{(\nu)} \end{aligned}} \qquad (18.11)$$

Erklärung: (i) $|s(\nu)\rangle \sim$ Produkt von Einteilchenzuständen

(ii) Symmetrisierungsoperator:

$$\boxed{S = \frac{1}{\nu!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_\nu} \sigma} \qquad (18.12)$$

mit $\sigma\left(|i_1\rangle^{(1)} |i_2\rangle^{(2)} \dots |i_\nu\rangle^{(\nu)}\right) := |i_{\sigma(1)}\rangle^{(1)} |i_{\sigma(2)}\rangle^{(2)} \dots |i_{\sigma(\nu)}\rangle^{(\nu)}$

... Permutation der $|i_k\rangle$

also: $\sigma \in \mathcal{P}_\nu$ ... Menge aller ν-Tupel-Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(\nu) \end{pmatrix}$$

Bsp: $\nu = 5$

$$\sigma\left(|1\rangle^{(1)}|1\rangle^{(2)}|4\rangle^{(3)}|6\rangle^{(4)}|6\rangle^{(5)}\right) = |1\rangle^{(1)}|6\rangle^{(2)}|4\rangle^{(3)}|1\rangle^{(4)}|6\rangle^{(5)}$$

mit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Teilchen nimmt Zustand von Teilchen 4 an

(iii) symmetrische Wellenfkt. unter Teilchenvertauschung

(iv) $[\ldots]^{1/2}$ ... Normierungsfaktor

$\dfrac{\nu!}{n_1^{(\nu)}! \ldots n_k^{(\nu)}! \ldots}$ ... Zahl der Möglichkeiten ν unterscheidbare Teilchen gemäß $[n_1^{(\nu)} \ldots n_k^{(\nu)} \ldots]$ auf die $|i_1\rangle$ bis $|i_\nu\rangle$ zu verteilen

- Boseteilchen: $\boxed{\text{Wertebereich: } n_k^{(\nu)} \in \{0, 1, 2, \ldots, \nu\}}$

b) Große Zustandssumme:

- Hilfsformel: (18.13)

$$\boxed{\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{[n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \ldots]} \underbrace{f(n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)} \ldots n_k^{(\nu)} \ldots)}_{\text{bel. Fkt. in } n_i^{(\nu)}} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_k=0}^{\infty} \ldots f(n_1, n_2, \ldots, n_k \ldots)}$$

jedes $n_1 + n_2 + \ldots + n_k + \ldots = \nu$ $\hat{=}$ Summand von links und umgekehrt

- Zustandssumme: $f_i = e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}$

$$Z_G \overset{(18.7)}{=} \sum_{\nu} \sum_{[n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)} \ldots]} e^{\sum_{i=1}^{\infty} \beta n_i^{(\nu)} (\mu - \varepsilon_i)}$$

$$\overset{(18.13)}{=} \sum_{n_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{n_k=0}^{\infty} \ldots \underbrace{\left(f_1^{n_1} f_2^{n_2} \ldots f_k^{n_k} \ldots\right)}_{e^{\sum_{i=1}^{\infty} \beta n_i (\mu - \varepsilon_i)}}$$

$$= \underbrace{(1 + f_1 + f_1^2 + \ldots)(1 + f_2 + f_2^2 + \ldots) \ldots (1 + f_k + f_k^2 + \ldots) \ldots}_{\text{erzeugt alle Terme in voriger Zeile und umgekehrt}}$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_i^{\,n}\right) \overset{!}{=} \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - f_i}$$

geometr. Reihe

$$\longrightarrow \boxed{Z_{BE} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_i)}}} \quad (18.14)$$

... große Zustandssumme der Bose-Einstein-Statistik

· großes Potential:

$$\boxed{\Omega_{BE} = k_B T \sum_i \ln\left[1-e^{(\mu-\varepsilon_i)/k_B T}\right] \overset{TD}{=} -pV} \quad (18.15)$$

c) Niveau-Besetzungszahlen:

- Besetzung des k-ten Zustandes (im Mittel):

$$(18.9) \longrightarrow N_k^{BE} = -k_B T \frac{\partial}{\partial \varepsilon_k} \ln Z_{BE} \overset{(18.15)}{=} \frac{e^{\beta(\mu-\varepsilon_k)}}{1-e^{\beta(\mu-\varepsilon_k)}}$$

$$\longrightarrow \boxed{N_k^{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k-\mu)}-1}} \quad (18.16)$$

... mittlere Besetzungszahl des k-ten Einteilchenzustandes in der Bose-Einstein-Statistik
= Bose-Verteilungsfunktion

18.4 Fermi-Dirac-Statistik

a) Vielteilchenzustand:

· Fermi-Teilchen/Fermionen: halbzahliger Spin
  Bsp. Elektronen, Myonen, Protonen, Neutronen, Quarks, ^{3}He-Atom

· pro Einteilchenzustand max. ein Teilchen! $\longleftrightarrow$ Antisymmetrie von $|s(\nu)\rangle$

- ν-Teilchenzustand:

$$\boxed{\begin{aligned} |s(\nu)\rangle &= |n_1^{(\nu)}, \dots, n_k^{(\nu)}, \dots\rangle \\ &= \sqrt{\nu!}\; A\, |i_1\rangle^{(1)} |i_2\rangle^{(2)} \dots |i_\nu\rangle^{(\nu)} \end{aligned}} \quad (18.17)$$

Erklärung: (i) Antisymmetrisierungsoperator:

$$\boxed{A = \frac{1}{\nu!} \sum_{\sigma \in P_\nu} \varepsilon_\sigma\, \sigma} \quad (18.18)$$

ε_σ ... Signum der Permutation
= -1, für ungerade Zahl von Vertauschungen in Gesamtpermutation σ

$= +1$, f = gerade Zahl .....

Bsp: $\nu = 2$ $\quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|k\rangle^{(1)} |k\rangle^{(2)} \xrightarrow{\sigma} -|k\rangle^{(1)} |k\rangle^{(2)}$$

$\longrightarrow$ Zustand $|k\rangle$ kann nicht mit 2 Teilchen und mehr besetzt sein

(ii) $\sqrt{\nu!}$ ... Normierungsfaktor [aus Bose-Fall mit $n_k^{(\nu)} = 0,1$]

· Fermionen: $\boxed{\text{Wertebereich } n_k^{(\nu)} = 0 \text{ oder } 1}$

„Zwei e^- können nicht dasselbe Niveau besetzen"!

$\longrightarrow$ $\boxed{s(\nu) = \text{Folge von } 0 \text{ und } 1}$

b) Große Zustandssumme

· $Z_G = \ldots$ wie bei Bosonen, aber $n_k = 0,1$ & $f_k = e^{\beta(\mu - \varepsilon_k)}$

$$= \sum_{n_1=0}^{1} \sum_{n_2=0}^{1} \cdots \sum_{n_k=0}^{1} \cdots \left(f_1^{n_1} f_2^{n_2} \cdots f_k^{n_k} \cdots \right)$$

$$= \left(\underset{n_1=0}{1} + \underset{n_1=1}{f_1}\right)(1+f_2)\cdots(1+f_k)\ldots$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} (1+f_i)$$

$$\longrightarrow \boxed{Z_{FD} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}\right)} \quad (18.19)$$

... große Zustandssumme in der Fermi-Dirac-Statistik

· großkanonisches Potential:

$$\boxed{\Omega_{FD} = -k_B T \sum_i \ln\left[1 + e^{(\mu - \varepsilon_i)/k_B T}\right]} \quad (18.20)$$

c) Niveaubesetzung:

$$N_k^{FD} = \frac{\partial \Omega_{FD}}{\partial \varepsilon_k} = \frac{e^{\beta(\mu - \varepsilon_k)}}{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_k)}}$$

$$\longrightarrow \boxed{N_k^{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} + 1}} \quad (18.21)$$

... mittlere Besetzungszahl des k-ten Einteilchenzustandes in der Fermi-Dirac-Statistik

. . . .

= Fermi-Verteilungsfkt.

<u>NB:</u> $$N_k^{FD/BE} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_k - \mu)} \pm 1}$$!! wichtiger Unterschied!

19. <u>Das ideale Fermi-Gas</u>

- identische Teilchen: mit halbzahligem Spin
  <u>ohne</u> Wechselwirkung
- <u>Bsp:</u> Neutronensterne, ^3He-Gas
  e^- in Metallen