

18.2 Exakte Statistik ununterscheidbarer und nicht wechselwirkender Teilchen

:

d) Typen ununterscheidbarer Teilchen:

Vielteilchen-QM $\begin{cases} \rightarrow \text{Bosonen: viele Teilchen im Einzelzustand} \\ \rightarrow \text{Fermionen: maximal ein Teilchen} \end{cases}$

18.3 Bose-Einstein-Statistik

a) Vielteilchenzustand:

• Bose-Teilchen / Bosonen: ganzzahligen Spin

Bsp: Mesonen (Kaonen & Pionen), ^4He -Atome, Cooper-Paare, Photonen ($S=1$), Phononen ($S=0$), intermediäre Vektorbosonen ($W^\pm, Z^0$)

• ν -Teilchenzustand in QM: mit $i_k^{(\nu)}$... Teilchen k im Einzelteilchenzustand i_k

$$\begin{aligned} |s(\nu)\rangle &= |n_1^{(\nu)}, n_2^{(\nu)}, \dots, n_k^{(\nu)} \dots\rangle \\ &= \left[\frac{\nu!}{n_1^{(\nu)}! n_2^{(\nu)}! \dots n_k^{(\nu)}! \dots} \right]^{1/2} S |i_1^{(1)}\rangle |i_2^{(2)}\rangle \dots |i_\nu^{(\nu)}\rangle \end{aligned} \quad (18.11)$$

Erklärung: (i) $|s(\nu)\rangle \sim$ Produkt von Einzelteilchenzuständen

(ii) Symmetrisierungoperator:

$$S = \frac{1}{\nu!} \sum_{G \in \mathcal{P}_\nu} G \quad (18.12)$$

mit $G(|i_1^{(1)}\rangle |i_2^{(2)}\rangle \dots |i_\nu^{(\nu)}\rangle) = |i_{G(1)}^{(1)}\rangle |i_{G(2)}^{(2)}\rangle \dots |i_{G(\nu)}^{(\nu)}\rangle$

... Permutation der i_k

also: $G \in \mathcal{P}_\nu$... Menge aller ν -Tupel-Permutationen

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & \nu \\ G(1) & G(2) & \dots & G(\nu) \end{pmatrix}$$

$$K=p: v=5$$

$$G(|1^{(1)}\rangle |1^{(2)}\rangle |4^{(3)}\rangle |6^{(4)}\rangle |6^{(5)}\rangle) = |1^{(1)}\rangle |6^{(2)}\rangle |4^{(3)}\rangle |1^{(4)}\rangle |6^{(5)}\rangle$$

$$\text{mit } G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Teilelement Zustand von Teilchen 4 an

(iii) symmetrische Wellenfkt. unter Teilchenvertauschung

(iv) [...] ^{1/2} ... Normierungsfaktor

$$\frac{v!}{n_1^{(v)}! \dots n_k^{(v)}!} \dots \text{Zahl der Möglichkeiten } v \text{ ununterscheidbare Teilchen gemäß } [n_1^{(v)} \dots n_k^{(v)}] \text{ auf die } |i_1\rangle \text{ bis } |i_v\rangle \text{ zu verteilen}$$

• Bose Teilchen: Wertebereich: $n_k^{(v)} \in \{0, 1, 2, \dots, v\}$

b) Große Zustandssumme:

• Hilfsformel:

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{[n_1^{(v)}, n_2^{(v)}, \dots]} f(n_1^{(v)}, n_2^{(v)}, \dots, n_k^{(v)}) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \underbrace{f(n_1, n_2, \dots, n_k)}_{\text{jedes } n_1 + n_2 + \dots + n_k = v \leq \text{Summe von links und ungelöst}} \quad (18.B)$$

- Zustandssumme: $f_i = e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}$

$$Z_G = \sum_v \sum_{[n_1^{(v)}, n_2^{(v)}, \dots]} e^{\sum_{i=1}^{\infty} \beta n_i^{(v)} (\mu - \epsilon_i)}$$

$$\stackrel{(18.13)}{=} \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_k=0}^{\infty} \underbrace{(f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_k^{n_k})}_{e^{\sum_{i=1}^{\infty} \beta n_i (\mu - \epsilon_i)}}$$

$$= (1 + f_1 + f_1^2 + \dots) (1 + f_2 + f_2^2 + \dots) \dots (1 + f_k + f_k^2 + \dots) \dots$$

erzeugt alle Terme in voriger Zeile und ungelöst

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_i^n \right) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - f_i}$$

gem. Reihe

$$\rightarrow Z_{BE} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}} \quad (18.14)$$

... große Zustandssumme der Bose-Einstein-Statistik

• großes Potential:

$$\Omega_{BE} = k_B T \sum_i \ln [1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_i)/k_B T}]^{-1} = -pV \quad (18.15)$$

c) Niveau-Besetzungszahlen:

• Besetzung des k -ten Zustandes (im Mittel):

$$(18.9) \rightarrow N_k^{BE} = -k_B T \frac{\partial}{\partial \epsilon_k} \ln Z_{BE} \stackrel{(18.15)}{=} \frac{e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}}{1 - e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}}$$

$$\rightarrow N_k^{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} - 1} \quad (18.16)$$

... mittlere Besetzungszahl des k -ten Einteilchenzustandes
in der Bose-Einstein-Statistik
= Bose-Verteilungsfunktion

18.4 Fermi-Dirac-Statistik

a) Vielteilchenzustand:

• Fermi-Teilchen/Fermionen: halbzahliger Spin

Bsp. Elektronen, Myonen, Protonen, Neutronen, Quarks, ^3He -Atome

• pro Einteilchenzustand max. ein Teilchen! $\leftrightarrow$ Antisymmetrie von $|\psi\rangle$

• ν -Teilchenzustand:

$$|\psi(\nu)\rangle = |n_1^{(1)}, \dots, n_k^{(k)}, \dots\rangle \\ = \frac{1}{\sqrt{\nu!}} A |i_1\rangle^{(1)} |i_2\rangle^{(2)} \dots |i_\nu\rangle^{(\nu)} \quad (18.17)$$

Erklärung: (i) Antisymmetrisierungsoperator:

$$A = \frac{1}{\nu!} \sum_{G \in P_\nu} \epsilon_G G \quad (18.18)$$

ϵ_G ... Signum der Permutation

$= -1$, für ungerade Zahl von Vertauschungen
in Gesamtpermutation G

$= +1$, f = gerade Zahl

Bsp: $v=2$ $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$|k\rangle^{(1)} |k\rangle^{(2)} \xrightarrow{G} -|k\rangle^{(1)} |k\rangle^{(2)}$$

→ Zustand $|k\rangle$ kann nicht mit 2 Teilchen und mehr besetzt sein

(ii) $\sqrt{v!}$... Normierungsfaktor [aus Bose-Fall mit $n_k^{(v)} = 0, 1$]

• Fermionen: $\text{Wertebereich } n_k^{(v)} = 0 \text{ oder } 1$

• zwei e^- können nicht dasselbe Niveau besetzen!

→ $s(v) = \text{Folge von } 0 \text{ und } 1$

b) Große Zustandssumme

• $Z_G = \dots$ wie bei Bosonen, aber $n_k = 0, 1$ & $f_k = e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}$

$$= \sum_{n_1=0}^1 \sum_{n_2=0}^1 \dots \sum_{n_k=0}^1 \dots (f_1^{n_1} f_2^{n_2} \dots f_k^{n_k} \dots)$$

$$= (1 + f_1) (1 + f_2) \dots (1 + f_k) \dots$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} (1 + f_i)$$

→ $Z_{FD} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_i)})$ (18.13)

... große Zustandssumme in der Fermi-Dirac-Statistik

• großkanonisches Potential:

$\Omega_{FD} = -k_B T \sum_i \ln [1 + e^{(\mu - \epsilon_i)/k_B T}]$ (18.20)

c) Niveaubesetzung:

$$N_k^{FD} = \frac{\partial \Omega_{FD}}{\partial \epsilon_k} = \frac{e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}}{1 + e^{\beta(\mu - \epsilon_k)}}$$

→ $N_k^{FD} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} + 1}$ (18.21)

... mittlere Besetzungszahl des k -ten Einteilchenzustandes in der Fermi-Dirac-Statistik

= Fermi-Verteilungsfkt.

NB: $N_k^{\text{FD}} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1} \quad !! \quad \text{wichtiger Unterschied!}$

19. Das ideale Fermi-Gas

- identische Teilchen, mit halbzelliger Spin
 ohne Wechselwirkung
- Bsp: Neutronensterne, ^3He -Gas
 e^- in Metallen