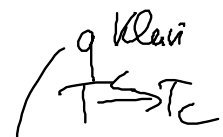


Wdh: $H = -\frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} J_{ij} \underline{S}_i \cdot \underline{S}_j - \sum_i h_T \underline{S}_i$

3dim-Spins:

betrachte $\underline{m} = m \underline{e}_z$ ($T < T_c$)

$h \rightarrow 0$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{longitudinale Suszept. } \chi_{zz}(q) \sim \frac{b}{a + q^2} \\ \text{Onstani-Zemike-Verhalten} \\ \text{transversale Suszept. } \chi_{xx}(q) = \chi_{yy}(q) \end{array} \right.$



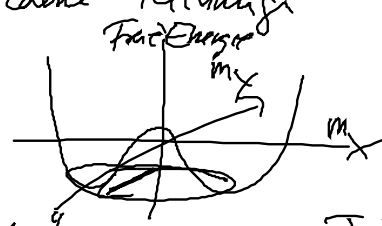
$\frac{b}{a + q^2}$
 b, a ; unabhängig von $|q|$

$\chi_{xx}(q) \sim \frac{b}{q^2}$

divergiert für $q \rightarrow 0$ auch dann, wenn $T \neq T_c$!!

Reflexion die "Erhaltung" der Richtung von \underline{m} bei kontinuierlicher Symmetrie

bzw. die Abwesenheit ~~von~~ von (Frei-Energie-)Barrieren zw. verschiedenen Richtungen



"mexican hat" (XY-Modelle)

"Goldstone-Moden": ungedämpfte Fluktuationen $T < T_c$

Richttransformieren in den Ortsraum

3 Raumdim.

$$\chi_{\perp}(N) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{2J'q^2}$$

transversal ($\perp = x, y$)

aus φ -Integral

Kugelkoordinat

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{2\pi}{2J'} \int_0^{\infty} dq q^2 \int_{-1}^1 d(\cos\theta) e^{iqN \cos\theta}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2J'} \int_0^{\infty} dq \frac{2 \sin qN}{qN}, \quad u = qN$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2J'} \frac{2}{N} \int_0^{\infty} du \frac{\sin u}{u}$$

$\frac{\pi}{2}$

transversale Korrelationsfunktion

$$\chi_{\perp}(N) \sim g_{\perp}(N) \sim \frac{1}{N}$$

Dasselbe Verhalten haben wir im Fall skalare
Ordnungsparameter (diskrete Symmetrie)

bei $T = T_C \Leftrightarrow \xi \rightarrow \infty$ g_l kunden!

Umkehrschred jetzt: $\chi_{\perp} \sim \frac{1}{N}$ auch bei $T \neq T_C$
($T < T_C$)

Betrachte jetzt Raumdim. Z :

$$\chi_{\perp}(n) = \frac{1}{(2\pi)^Z} \int_0^{\infty} dq q \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{e^{iqn \cos \varphi}}{2J_1(q)}$$

Zylinderkoordinaten

$$= \frac{1}{(2\pi)^Z} \frac{1}{2J_1} \int_0^{\infty} dq \frac{1}{q} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{iqn \cos \varphi}$$

Integrand divergiert für $q \rightarrow 0$!

\Rightarrow Rücktransf. ist für $D \leq Z$ nicht möglich!
 \uparrow
 Raumdim.

Das entspricht dem sogenannten

Mermin-Wagner-Theorem (1966)

Für Systeme mit kontinuierlicher Symmetrie
 $(d \geq 2)$ ist die sogenannte "untere kritische Dimension" $D=2$
 \uparrow Spindimension \uparrow Raum

$$D=2$$

\Leftrightarrow Für $D \leq 2$ zerstören die Goldstone-Moden
jede langreichweitige Ordnung im System !

(betrifft auch andere Typen von Phasenübergängen,
 z.B. Bildung eines Kristalls aus der flüssigen Phase in $D=2$)

III.8. Ising-Modell in $D=1$

$$H = -J \sum_{i=1}^N S_i S_{i+1} - h \sum_{i=1}^N S_i \quad \text{homogenes Feld}$$



Festlegung: $S_{N+1} = S_N$ "period. Randbedingung!"

Vorteil: Translationsinvarianz

$$\Rightarrow \langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle = \dots = \langle S_N \rangle = \langle S \rangle = m$$

Modell ist exakt lösbar! Ising 1925

Lösung \rightarrow Überzettel

$$Z_N = \sum_{\{S\}} e^{-\beta H} = \dots = \text{Tr} \underline{V}^N$$

Kanon. Zustandssumme $\sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \dots$ Spur

V : Transfermatrix mit Elementen: $(V)_{\alpha\beta} = e^{\beta J S_\alpha S_\beta + \frac{\beta h}{2} (S_\alpha + S_\beta)}$

Diagonalisierung

$$\Rightarrow Z_N = \text{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

\Rightarrow Freie Energie F , Magnetisierung pro Spin

$$m = -\frac{1}{N} \frac{\partial F(h, T)}{\partial h}$$

Ergebnis:

$$m(h, T) = \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}}$$

exakt!!

(Kein Meanfield!)

Analyse zeigt:

$$m(h \rightarrow 0, T) = 0 \quad \text{für alle } T > 0 !!$$

Keine spontane Magnetisierung für $T > 0$

— in Unterschied zur Vorlesung der MF-Theorie!

andereits:

betrachte m für $h \neq 0$, $T \rightarrow 0$, aber T endlich
(βJ groß)

$m \rightarrow 1$, und zwar unabhängig
vom genauen Wert von T !!
und h !!

Für $T=0$ (im Grundzustand) ist die Magnetisierung
endlich, und zwar unabhängig von h !

\Rightarrow auch ein noch so kleines Feld erzeugt
Ordnung für $T \rightarrow 0$

III.9. Landau-Theorie von Phasenübergängen

Grundidee :

In der Nähe von Phasenübergängen sind die Ordnungsparameter typischerweise klein!!

Landau
1936

(Anzahl bei Übergang 2. Ordnung; bei Übergang 1. Ordnung ist das eine Ausnahme)

⇒ Freie Energie kann in Potenzen des Ordnungsparameters entwickelt werden!!

• Entwicklung muss die Symmetrien des Systems berücksichtigen, z.B. Invarianz bei Vorzeichenwechsel oder Drehung des Ordnungsparameters

• Die freie Energie ist eine Skalar!


Beispiele hatten wir bereits kennengelernt.

Ising-Modell (MF):

$$\frac{\beta F}{N} = \frac{\beta J_0}{z} m^2 - \ln 2 \cosh(\beta J_0 m)$$

$$\Rightarrow \frac{\beta F}{N} \approx \frac{1}{z} \beta J m^2 (1 - \beta J) + \frac{1}{8} \beta^3 J^3 m^4 - \frac{1}{z} \ln 2$$

Landau-Entw. in m !!

berücksichtigt die Invarianz $m \leftrightarrow -m$
 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$

 es treten keine Terme der Ordnung m^3, m^5, \dots auf

Van-der-Waals-Ges

Durch $p = \frac{k_B T}{V-b} - \frac{a}{V^2}$

Entwickle $\ln Z$ direkt am krit. Punkt.

$$\Delta \tilde{p} = \frac{p-p_c}{p_c} = 4 \frac{T-T_c}{T_c} - 6 \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right) \left(\frac{V-V_c}{V_c} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{V-V_c}{V_c} \right)^3$$

$\frac{V-V_c}{V_c} \approx \frac{1}{3}$

Das ist ein thermodyn. Potential,

deun:

$$J = -k_B T \ln Z_{GK} \quad \text{--- grosskanon. Zustandssumme}$$

$$= -pV$$

\uparrow
 Gibbs-Potential

Allgemeiner Ansatz für System mit Symmetrie
 $m \leftrightarrow -m$ und damit $F(m, T) = F(-m, T)$
 (ohne Zusatzfeld, statische Ordnungsparameter)

$$F(m, T) = a(T) + \frac{1}{2} b(T) m^2 + \frac{1}{4} c(T) m^4 + \frac{1}{6} d(T) m^6 + \mathcal{O}(m^8)$$

• Gleichgewichtsverhalte.
 aus $\left. \frac{\partial F}{\partial m} \right|_T \stackrel{!}{=} 0$

Diskutiere zunächst den folgenden Fall:

$$a) \left. \begin{array}{l} b(T) = b_0 (T - T_c) \text{ mit } b_0 > 0 \\ c(T) > 0 \\ d(T) > 0 \end{array} \right\} \neq T \quad \left. \begin{array}{l} \text{wie im} \\ \text{Isig-Fall} \\ \text{(siehe oben)} \end{array} \right\}$$

$T > T_c$: Minimum bei $m=0$

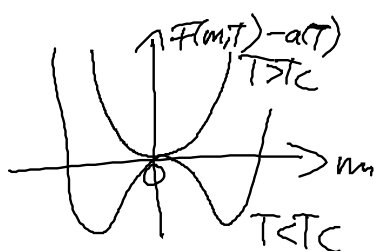
$$\left(\left. \frac{\partial^2 F}{\partial m^2} \right|_{m=0} = b(T) = b_0 (T - T_c) > 0 \right)$$

$T < T_c$: Minima bei $m \neq 0$

$$m = \pm \sqrt{\frac{b_0}{c(T)}} \sqrt{T_c - T} = \pm m_0$$

vernachlässige
 Term $\mathcal{O}(m^6)$

Mean-Field-Verhalten mit
 Exponent $\beta = \frac{1}{2}$



Phasenübergang
 zweiter Ordnung!

Man sieht außerdem:

Damit die Lösung $\pm m_0$ für $T < T_c$ tatsächlich ein Minimum darstellt, muß gelten

$$c(T) > 0, d(T) > 0$$

b) Betrachte nun die Situation.

$$b(T) = b_0 (T - T_c)$$

$$c(T) < 0$$

$$d(T) > 0 \text{ und } a(T) = 0$$

$$\Rightarrow F(m, T) = \frac{1}{2} b(T) m^2 + \frac{1}{4} c(T) m^4 + \frac{1}{6} d(T) m^6$$

m entspricht hier der Polarisation !! \leftarrow

(typischerweise gibt es „leichte Achsen“)

für die Polarisation $\underline{P} \Rightarrow$ skalarer Ordnungsparameter ist ausreichend)

wird z.B.
benutzt für
paradoxe.
 \rightarrow ferroelektr.
Übergang
in BaTiO_3

Extrema:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial m} \right|_T = b(T) m + c(T) m^3 + d(T) m^5 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(b(T) + c m^2 + d m^4) = 0 \quad (\neq)$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial m^2} \right|_T = b(T) + 3c(T) m^2 + 5d(T) m^4$$

Aus (*) folgt.

$m=0$ ist immer Lösung

weitere Extrema:

$$m_0^2 = -\frac{c}{2d} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4bd}{4d^2}} \quad \left| \begin{array}{l} \text{beachte:} \\ b=b(T) \end{array} \right.$$

(aus $b + cm^2 + dm^4 = 0$)

man kann zeigen (durch Betracht. des 2. Ableites)

$m_0^2 = -\frac{c}{2d} - \sqrt{\dots}$ entspricht immer Maximum von F
 \rightarrow wird vernachlässigt:

$$\Leftrightarrow m_0^2 = -\frac{c}{2d} + \sqrt{\dots}$$

entspricht Minimum,

existiert, falls $\frac{c^2 - 4bd}{4d^2} > 0$

$$\Leftrightarrow c^2 - 4bd > 0$$

wg. $d > 0 \Leftrightarrow c^2 - 4b_0(T - T_c) > 0$

Minimum existiert, falls

$$T \leq T_1 \quad \text{mit} \quad T_1 = T_c + \frac{c^2}{4b_0d} > 0$$