

## Ginzburg-Landau-Theorie

$$F = F[\phi] = \int dV \left( f(\phi(\mathbf{r})) + (\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 \right)$$

Funktional
Raumintegral

Annahme: skalare Ordnungsparameter, langsam  
variiert im Raum!

Gleichgewichts Konfiguration  $\phi^{\text{eq}}(\mathbf{r})$  aus  $\left. \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} \right|_{\phi^{\text{eq}}} \stackrel{!}{=} 0$

Beachte: lokale Theorie, nichtlokale Effekte  
(räuml. Korrelation!) werden vernachlässigt,  
ebenso höhere Ableitungen!

## Bemerkung zur Anwendung von Ginzburg-Landau-Funktionalen

- Inhomogene Systeme mit spontaner Symmetriebrechung  
(ohne und mit externem Feld)

Beispiele:

- Grenzfläche in phasenseparierendem Fluiden (Kondensatphase,  
Eutectikum binärer  
Fluide)  
⇒ Dichteprofil  $\rho(\mathbf{r})$

- Flüssigkristalle mit Defektstrukturen  
oder in Anwesenheit räumlicher Begrenzung

Ordnungsparameter  $Q(\mathbf{r})$  mit Elemente

Tensor  
2. Stufe

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (3u_{i\alpha}u_{i\beta} - 1) \right\rangle$$

entl. weitere Ordnungsparameter, z.B. Dichte  $\rho(\underline{r})$

Bei der Konstruktion des Funktionals muß man Symmetrien beachten.

- Supraleitende Flüssigkeit ("Bose-Fluid")  
z.B.  $He^4$

entscheidende Größe: Dichte der Teilchen im Grundzustand ( $\mu=0$ )

$$g(\underline{r}, \underline{r}') = \langle \hat{\alpha}^+(\underline{r}) \hat{\alpha}(\underline{r}') \rangle$$

Erwartungswert  
für Bosonen

Ordnungsparameter: reell und komplex

$$\psi(\underline{r}) \psi^*(\underline{r}') = \lim_{|\underline{r}-\underline{r}'| \rightarrow 0} g(\underline{r}, \underline{r}') \\ \left( \text{Komplexe Wellenfunktion} \right)$$

Historischer  
Startpunkt  
der  
Ginzburg-Landau  
Theorie

- Supraleitung:

$\psi(\underline{r})$ : Komplexe Wellenfunktion

Wichtig: Das Ginzburg-Landau-Funktional enthält  
Kopplg an das elektromagnet. Feld

$$|\nabla \psi|^2 \longrightarrow \left| \left( \nabla - \frac{iq}{\hbar c} A \right) \psi \right|^2$$

↳ Vektorpotential

Weitere Punkte:

- Abschätzung der Wichtigkeit von Fluktuationen  
(s. später)

Ausgangspunkt Renormierungsgruppe

## © Relaxationsdynamik von Ordnungsparametern

- Ausgangspunkt zur Untersuchung von Systemen weit weg vom Gleichgewicht: Musterbildung, Chaos

moderne Einföhrung

P.C. Hohenberg and A.P. Kulikar

Physics Reports 572, 1 (2015)

---

Abschätzung des Gültigkeitsbereichs der Ginzburg-Landau-Theorie:

Ginzburg-Kriterium

Grundidee: Fluktuation sollen klein sein gegenüber dem Mittelwert des Ordnungsparameters

Das ist auch Grundannahme beim Ginzburg-Landau-Funktionsansatz.  
Dort wurde angenommen, dass sich  $m(r)$  langsam mit  $r$  ändert

$$\text{also: } \langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle \\ = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \leq \langle M \rangle^2$$

mit  $M = \int d\underline{r} m(\underline{r})$

$$M^2 = \int d\underline{r} m(\underline{r}) \int d\underline{r}' m(\underline{r}') = \int d\underline{r} \int d\underline{r}' m(\underline{r}) m(\underline{r}')$$

$$\langle M^2 \rangle = \int d\underline{r} \int d\underline{r}' \langle m(\underline{r}) m(\underline{r}') \rangle$$

$$\approx \int d\underline{r} \langle m(\underline{r}) m(0) \rangle$$

↑ translationsinvariant

$$\int d\underline{r}^d (\langle m(\underline{r}) m(0) \rangle - \langle m(\underline{r}) \rangle \langle m(0) \rangle) \leq \int d\underline{r}^d \langle m(\underline{r}) \rangle \langle m(0) \rangle$$

$d$ : Raumdimension

⊗

Benutze unser früheres Resultat: — für Korrelationsfunktion  
dies am krit. Punkt

$$\langle m(\underline{r}) m(0) \rangle - \langle m(\underline{r}) \rangle \langle m(0) \rangle \sim \frac{e^{-M/\xi}}{N^{d-2}}$$

$\xi$ : Korrelationslänge

Omnistari-Zerfall  
Verhalt

⇒ Raumintegrale  $m$  ⊗ können auf Abstände  $r \leq \xi$  beschränkt werden

Nehme außerdem an, dass  $\langle m(t) \rangle = \langle m(0) \rangle = m$

Ausführung in  $\overset{d\text{-dimensional}}{\text{Kugelkoordinat}}$

$$\int_0^\beta \int d\mathbf{r} \, r^{d-1} \frac{e^{-Nr/\xi}}{r^{d-2}} \leq \int_0^\beta \int d\mathbf{r} \, m^2$$

$\uparrow$  Winkel fassen  $\leftarrow$  Potenzgesetzverhalten

benutze weiterhin:  $m = A_m \left( \frac{FK}{T_C} \right)^\beta$

$\uparrow$   
Vorfaktor (Amplitude)

$$\Rightarrow \int_0^\beta \int d\mathbf{r} \, r e^{-Nr/\xi} \leq \int_0^\beta \int d\mathbf{r} \, A_m \left( \frac{FK}{T_C} \right)^{2\beta}$$

Integral umformen:

$$x = \frac{Nr}{\xi} \Leftrightarrow r = \xi x, \quad \frac{dr}{dx} = \xi \Rightarrow dr = \xi dx$$

$$r dr = \xi^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\beta \int d\mathbf{r} \, x e^{-x} \leq \int_0^\beta \int d\mathbf{r} \, A_m \left( \frac{FK}{T_C} \right)^{2\beta}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\int_0^1 dx x e^{-x}}_{\text{Faktor von der Größenordnung 1}} A_m^{-1} \int \int^{z-d} \left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|^{-2\beta} \leq 1$$

benutze noch:  $\int \sim \left( \frac{T-T_c}{T_c} \right)^{-\nu}$

$$\Rightarrow \boxed{\left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|^{-2\nu + d\nu - 2\beta} \leq 1} \quad (**)$$

Stabilitätskriterium

Dicht am krit. Punkt gilt  $\left| \frac{T-T_c}{T_c} \right| < 1$

Damit **(\*\*)** erfüllt ist, muss gelten

$$\boxed{d\nu - 2\beta - 2\nu \geq 0}$$

$$\Leftrightarrow d \geq \frac{2(\beta + \nu)}{\nu}$$

Benutze jetzt unsere Meanfield-Resultate.

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d \geq d_c = 4$$

Man nennt  $d_c$  die "obere kritische Dimension" für die Mean-Field-Theorie

Interpretation:

Für  $d=3$  ist die Meanfield-Theorie nicht exakt!!

"Jeansregel"

Je höher die Zahl von "Nachbarn" ist, mit dem ein Teilchen bzw. ein Freiheitsgrad wechselwirkt, desto besser wird die Meanfield-Theorie!

Hintergrund: größere Zahl von Nachbarn  
 $\hat{=}$  höhere Dimension

Konsistent mit dem unendl. langreichweitigen Ising-Modell

$$H = -\frac{J_0}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} S_i S_j \Rightarrow \text{Meanfield-Theorie exakt!}$$

Man kann aus dem Überlegungsansatz auch den Temperaturbereich  $T_{GL}$  bestimmen, in dem die Meanfield-Theorie versagt

Wir hatten

$$\left( \int_0^1 dx x e^{-x} \right) A_m^{-1} \left\{ \left( \frac{T-T_c}{T_c} \right)^{-2\beta} \leq 1 \right.$$

$$\left. \right\} = A_3 \left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|^{-2}$$

$$\left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|^{-2\nu + d\nu - 2\beta} \leq \underbrace{\left( \int_0^1 dx x e^{-x} \right)^{-1} A_m A_3^{d-2}}_C$$

Benutze MF-Werte für die Exponenten  $\nu = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|^{\frac{1}{2}(d-4)} \leq C$$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

Gleichung quadrieren und invertieren

$$\left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|^{4-d} \geq C^{-2} = \tilde{z}_{GL} \quad \left. \begin{array}{l} \text{speziell für } d=3 \\ \left| \frac{T-T_c}{T_c} \right| \geq \tilde{z}_{GL} \end{array} \right\}$$

Interpretation:

Bei Annäherung an  $T_c$  wird ~~das~~ die Meanfield-Theorie  
 scharf, falls  $\tilde{z} = \left| \frac{T-T_c}{T_c} \right| < \tilde{z}_{GL}$



Grund: Fluktuationen, die je in der Theorie verhandelt werden, werden zu groß!

z.B. • typische Ferromagneten, Flüssigkeiten mit kurzreichliche  
Wechselwirkung

$$\tilde{z}_{GL} \sim 10^{-2}$$

• Supraleiter:  $\tilde{z}_{GL} \sim 10^{-9}$

• Flüssigkeiten mit langreichweitige Wechselwirkung  
(Coulomb  $\sim \frac{1}{r}$  wie z.B. in ionischen Flüssigkeiten)

$$\tilde{z}_{GL} \text{ viel kleiner als } 10^{-2}$$