Ginzburg-Landau-Theorie:

$$F = F[\phi] = \int d\mathbf{r} \, \left(f(\phi(\mathbf{r})) + (\nabla\phi(\mathbf{r}))^2 \right)$$

Funktional — Raumintegral

Annahme: skalarer Ordnungsparameter, langsam variierend im Raum!

Gleichgewichtskonfiguration $\phi^{eq}(\mathbf{r})$ aus $\left.\frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi}\right|_{eq} \overset{!}{=} 0$

Beachte: lokale Theorie, nichtlokale Effekte (räuml. Korrelation!) werden vernachlässigt, ebenso höhere Ableitungen!

Bemerkungen zur Anwendung von Ginzburg-Landau-Funktionale

- Inhomogene Systeme mit spontaner Symmetriebrechung (ohne und mit externem Feld)

Beispiele:

- Grenzfläche in phasenseparierenden Fluiden (Kondensation, Entmischung binärer Fluide)
  $\Rightarrow$ Dichteprofil $\rho(\mathbf{r})$
- Flüssigkristalle mit Defektstrukturen oder in Anwesenheit räumlicher Begrenzung
  Ordnungsparameter $\Rightarrow \underline{\underline{Q}}(\mathbf{r})$ mit Elementen

$$Q_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (3 u_{i,\alpha} u_{i,\beta} - 1) \right\rangle$$

Tensor 2. Stufe

$\vec{u}_i$

evtl. weitere Ordnungsparameter, z.B. Dichte $\rho(\underline{r})$

Bei der Konstruktion des Funktionals muß man Symmetrien beachten.

- Suprafluide Flüssigkeit ("Bose-Fluid")

z.B. He^4

entscheidende Größe: Dichte der Teilchen im Grundzustand ($p=0$)

$$\rho(\underline{r},\underline{r}') = \langle \hat{a}^+(\underline{r})\,\hat{a}(\underline{r}')\rangle$$

Erzeuger bzw. Vernichter für Bosonen

Ordnungsparameter: ortsabh. und komplex

$$\psi(\underline{r})\,\psi^*(\underline{r}') = \lim_{|\underline{r}-\underline{r}'|\to\infty} \rho(\underline{r},\underline{r}')$$

komplexe Wellenfunktion

Historischer Startpunkt der Ginzburg-Landau Theorie

- Supraleitung:

$\psi(\underline{r})$: komplexe Wellenfunktion

Wichtig: Das Ginzburg-Landau-Funktional enthält Kopplung an das elektromagnet. Feld

$$|\nabla\psi|^2 \longrightarrow \left|\left(\nabla - \frac{iq}{\hbar c}\underline{A}\right)\psi\right|^2$$

Vektorpotential

<u>Weitere Kontexte</u>:

- Abschätzung der Wichtigkeit von Fluktuationen (s. später)

Ausgangspunkt Renormierungsgruppe

◎ Relaxationsdynamik von Ordnungsparametern

- Ausgangspunkt zur Untersuchung von Systemen weit weg vom Gleichgewicht: Musterbildung, Chaos

moderne Einführung
P.C. Hohenberg and A.P. Krekhov
Physics Reports 572, 1 (2015)

Abschätzung des Gültigkeitsbereichs der Landau-Theorie: Ginzburg-Kriterium

Grundidee: Fluktuationen sollten klein sein gegenüber dem Mittelwert des Ordnungsparameters

Das ist auch Grundannahme beim Ginzburg-Landau-Funktional: Dort wurde angenommen, dass sich $m(\underline{r})$ langsam mit $\underline{r}$ ändert

also: $$\langle (M - \langle M \rangle)^2 \rangle = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \leq \langle M \rangle^2$$

mit $M = \int d\underline{r}\, m(\underline{r})$

$$M^2 = \int d\underline{r}\, m(\underline{r}) \int d\underline{r}'\, m(\underline{r}') = \int d\underline{r} \int d\underline{r}'\, m(\underline{r}) m(\underline{r}')$$

$$\langle M^2 \rangle = \int d\underline{r} \int d\underline{r}' \langle m(\underline{r}) m(\underline{r}') \rangle$$

$$\approx \int d\underline{r} \langle m(\underline{r}) m(0) \rangle$$

translationsinvariant

$$\boxed{\int d\underline{r}^d \left(\langle m(\underline{r}) m(0) \rangle - \langle m(\underline{r}) \rangle \langle m(0) \rangle \right) \leq \int d\underline{r}^d \langle m(\underline{r}) \rangle \langle m(0) \rangle} \quad (*)$$

d: Raumdimension

Benutze unser früheres Resultat: für Korrelationsfunktion dicht am krit. Punkt

$$\langle m(\underline{r}) m(0) \rangle - \langle m(\underline{r}) \rangle \langle m(0) \rangle \sim \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2}}.$$

Ornstein-Zernike Verhalten

ξ: Korrelationslänge

$\Rightarrow$ Raumintegrale in $(*)$ können auf Abstände $r \leq \xi$ beschränkt werden

Nehme außerdem an, dass $\langle m(r) \rangle = \langle m(0) \rangle$
$= m$

d-dimensional

Ausführung in Kugelkoordinaten

$$B \int_0^{\xi} dr\, r^{d-1} \frac{e^{-r/\xi}}{r^{d-2}} \leq B \xi^d m^2$$

Winkelfaktor

Potenzgesetzverhalten

benutze weiterhin: $m = A_m \left(\frac{T-T_c}{T_c} \right)^{\beta}$

Vorfaktor (Amplitude)

$$\Rightarrow B \int_0^{\xi} dr\, r e^{-r/\xi} \leq B \xi^d A_m \left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|^{2\beta}$$

Integral umformen:

$$x = r/\xi \Leftrightarrow r = \xi x \,, \quad \frac{dr}{dx} = \xi \Rightarrow dr = dx\, \xi$$

$$r\,dr = \xi^2 x\, dx$$

$$\Rightarrow \cancel{B} \xi^2 \int_0^1 dx\, x e^{-x} \leq \cancel{B} \xi^d A_m \left| \frac{T-T_c}{T_c} \right|^{2\beta}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\int_0^1 dx\, x\, e^{-x}\right) A_m^{-1}}_{\text{Faktor von der Größenordnung 1}} \xi^{2-d} \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-2\beta} \leq 1$$

benutze noch: $\xi \sim \left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)^{-\nu}$

$$\Rightarrow \boxed{\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-2\nu + d\nu - 2\beta} \leq 1} \quad (**)$$

Ginzburg-Kriterium

Dicht am Krit.-Punkt gilt $\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right| < 1$

Damit (**) erfüllt ist, muß gelten

$$\boxed{d\nu - 2\beta - 2\nu \geq 0}$$

$$\Leftrightarrow d \geq \frac{2(\beta+\nu)}{\nu}$$

Benutze jetzt unsere Meanfield-Resultate.

$$\beta = \frac{1}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{d \geq d_C = 4}$$

Man nennt d_C die "obere Kritische Dimension" für die Mean-Field-Theorie

Interpretation:

Für $d=3$ ist die Meanfield-Theorie nicht exakt!!

„Faustregel"

Je höher die Zahl von „Nachbarn" ist, mit dem einem Teilchen bzw. ein Freiheitsgrad wechselwirkt, desto besser wird die Meanfield-Theorie!

Hintergrund: größere Zahl von Nachbarn
$\hat{=}$ höhere Dimension

Konsistent mit dem unendl.-langreichweitige Ising-Modell

$$H = -\frac{J_0}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j \neq i} S_i S_j \Longrightarrow \text{Meanfield-Theorie exakt!}$$

Man kann aus diesen Überlegungen heraus auch den Temperaturbereich τ_{GL} bestimmen, in dem die Meanfield-Theorie versagt

Wir hatten:

$$\left(\int_0^1 dx\, x\, e^{-x}\right) A_m^{-1}\, \xi^{2-d} \left(\frac{T-T_c}{T_c}\right)^{-2\beta} \leq 1$$

$$\xi = A_\xi \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-\nu}$$

$$\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{-2\nu+d\nu-2\beta} \leq \underbrace{\left(\int_0^1 dx\, x\, e^{-x}\right)^{-1} A_m A_\xi^{d-2}}_{C}$$

Benutze MF-Werte für die Exponenten $\nu = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{\frac{1}{2}(d-4)} \leq C$$

Gleichung quadrieren und invertieren

$$\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right|^{4-d} \geq C^{-2} = \hat{\tau}_{GL}$$

speziell für $d=3$

$$\left|\frac{T-T_c}{T_c}\right| \geq \hat{\tau}_{GL}$$

Interpretation:

Bei Annäherung an T_c wird ~~der~~ die Mean-Field-Theorie schlecht, falls $\hat{\tau} = \left|\frac{T-T_c}{T_c}\right| < \hat{\tau}_{GL}$

Grund: Fluktuation, die ja in der Theorie vernachlässigt wurde, werden zu groß!

z.B. • typische Ferromagneten, Flüssigkeiten mit <u>kurzreichweitiger Wechselwirkung</u>

$$\tilde{\tau}_{GL} \sim 10^{-2}$$

• Supraleiter: $\tilde{\tau}_{GL} \sim 10^{-9}$

• Flüssigkeiten mit langreichweitiger Wechselwirkung (Coulomb $\sim \frac{1}{r}$ wie z.B. in ionischen Flüssigkeiten)

$\tilde{\tau}_{GL}$ viel kleiner als 10^{-2}