Ergänzung zur VL: Supraleitender Strom

$$H = \sum_{k} \varepsilon_k a_k^+ a_k - V_0 \sum_{kk'}' a_{k'}^+ a_{-k'}^+ a_{-k} a_k$$

$$\xrightarrow{BCS} H = E_0 + \sum_k E_k^1 \left(b_k^+ b_k + b_{-k}^+ b_{-k} \right), \quad E_k^1 = \sqrt{\varepsilon_k^2 + \Delta^2}$$

wie sieht nun der Strom aus?

allg. $j(r,t) = \frac{q}{2m} \psi^+(r,t) \overrightarrow{(p - qA)} \psi(r,t) + h.a.$

$$\psi(r,t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{k_2,\lambda} e^{i \underline{k}_2 \cdot \underline{r}} a_{k_2\lambda}$$ (räuml. Mittelung, 1 Band-Theorie)

$$j = \frac{q}{2mV} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ \lambda}} e^{-i \underline{k}_1 \cdot \underline{r}} \frac{\hbar}{i} \left(\nabla_r e^{i \underline{k}_2 \cdot \underline{r}} \right) a_{k_1\lambda}^+ a_{k_2\lambda} + h.a.$$

$$- \frac{q^2}{2mV} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ \lambda}} e^{-i(\underline{k}_1 - \underline{k}_2)\cdot \underline{r}} \underline{A}(\underline{r},t) a_{k_1\lambda}^+ a_{k_2\lambda} + h.a.$$

$$= \frac{q}{2mV} \sum_{\substack{k_1 k_2 \\ \lambda}} e^{-i(\underline{k}_1 - \underline{k}_2)\cdot \underline{r}} \hbar \underline{k}_2 a_{k_1\lambda}^+ a_{k_2\lambda} + \underbrace{h.a.}_{\substack{k_1 \to k_2 \\ k_2 \to k_1}}$$

$$- \frac{q^2}{2mV} \sum_{k_1 k_2 \lambda} e^{-i(\underline{k}_1 - \underline{k}_2)\cdot \underline{r}} \underline{A} a_{k_1\lambda}^+ a_{k_2\lambda} + h.a.$$

$$= \frac{q}{2mV} \sum_{k_1,k_2,\lambda} e^{-i(\underline{k}_1 - \underline{k}_2)\cdot \underline{r}} \hbar (\underline{k}_1 + \underline{k}_2) a_{k_1\lambda}^+ a_{k_2\lambda}$$

$$-\frac{q^2}{Vm}\sum_{p_1,p_2,\lambda} e^{-i(p_1-p_2)\cdot r}\,\underline{A}\; a^+_{p_1\lambda}\, a_{p_2\lambda}$$

Schwerpunktkoordinate $q=\frac{p_1+p_2}{2}$

Relativkoordinate $Q=p_1-p_2$

$p_1=2q-p_2=2q-(p_1-Q)$

$p_1=q-\frac{Q}{2},\; p_2=q+\frac{Q}{2}$

$$j=-\frac{q}{Vm}\sum_{q,Q,\lambda} e^{-iQ\cdot r}\,\hbar q\; a^+_{q-\frac{Q}{2}\lambda}\, a_{q+\frac{Q}{2}\lambda}$$

$$-\frac{q^2}{Vm}\sum_{q,Q,\lambda} e^{-iQ\cdot r}\,\underline{A}(r,t)\; a^+_{q-\frac{Q}{2}\lambda}\, a_{q+\frac{Q}{2}\lambda}$$

Randbedingung: räuml. Homogenität, Mittelung über Relativkoordinatenbeitrag fällt weg $Q\approx 0$

$$j(r,t)=\frac{q}{m}\sum_{q,\lambda}\frac{1}{V}\hbar q\;\underbrace{a^+_{q\lambda}\, a_{q\lambda}}\;-\frac{q^2}{mV}\sum_{q,\lambda}\underline{A}\; a^+_{q\lambda}\, a_{q\lambda}$$

Quantenkinetik berechnen

1. Ordnung in $|\underline{A}|$

Berechnung über Heisenberg Bgl.

$$-i\hbar\,\partial_t\langle\hat{O}\rangle=\langle[H,\hat{O}]\rangle+\cancel{\partial_t\langle\hat{O}\rangle}$$

Einteilchen-Hamiltonian: $H=\frac{1}{2m}(p+e_0\underline{A})^2+\underbrace{H_{el-ph}}_{\text{BCS Theorie}}$

(alles andere weglassen, keine externe Felder)

(2. Quantisierung und in BCS-Bild transformieren)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{e_0 \underline{A}\cdot \underline{p}}{m} + H_{el-ph} + \cancel{A^2}$$

Störungsrechnung linear in $|\underline{A}|$

$$\frac{e_0}{m}\underline{A}(\underline{r})\cdot\underline{p} \longrightarrow \frac{e_0}{m}\sum_{q,Q,s} \underline{A}(\underline{Q})\, a^\dagger_{q+\frac{Q}{2}s}\, a_{q-\frac{Q}{2}s}\, \hbar q$$

$$\underbrace{\underline{A}(\underline{Q}) = \frac{1}{V}\sum_{R} e^{-i\underline{Q}\cdot\underline{R}}\, \underline{A}(\underline{R})}$$

muss jetzt ins BCS-Bild, um effektiv die El-Ph-WW zu berücksichtigen

(Spin up: q) (Spin down: $-q$)

$$\sum_{q,s} q\, a^\dagger_{q+\frac{Q}{2}s}\, a_{q-\frac{Q}{2}s} \equiv \sum_q q\, a^\dagger_{q+\frac{Q}{2}}\, a_{q-\frac{Q}{2}} + (-q)\, a^\dagger_{-q+\frac{Q}{2}}\, a_{-q-\frac{Q}{2}}$$

s = spin

$$= \sum_q q \left\{ a^\dagger_{\underbrace{q+\frac{Q}{2}}_{k_1}}\, a_{\underbrace{q-\frac{Q}{2}}_{k_2}} - a^\dagger_{\underbrace{-(q-\frac{Q}{2})}_{-k_2}}\, a_{\underbrace{-(q+\frac{Q}{2})}_{-k_1}} \right\}$$

$$\equiv \sum_q q \Big\{ \left(u_{k_1} b^\dagger_{k_1} + v_{k_1} b_{-k_1}\right)\left(u_{k_2} b_{k_2} + v_{k_2} b^\dagger_{-k_2}\right)$$
$$- \left(u_{k_2} b^\dagger_{-k_2} - v_{k_2} b_{k_2}\right)\left(u_{k_1} b_{-k_1} - v_{k_1} b_{k_1}\right) \Big\}$$

$$= \sum_q \{ \text{ausmultiplizieren} \}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{nutze} \to \underline{Q} \to 0 \quad u_{q_1} \simeq u_{q_2} \ (q_1 \simeq q_2) \\ \qquad (\underline{Q} \neq 0) \quad v_{q_1} \approx v_{q_2} \ (q_1 \approx q_2) \end{array} \right\}$$

$u_q^2 + v_q^2 = 1$

$$\approx \sum_q q \left(b^+_{q+\frac{Q}{2}} b_{q-\frac{Q}{2}} - b^+_{-(q-\frac{Q}{2})} b_{-(q+\frac{Q}{2})} \right)$$

Berechnung des Stroms im normalleitenden und supraleitenden Fall

Hamiltonian $H = \sum_{q\lambda} E^\lambda_q b^+_{q\lambda} b_q + \frac{\hbar e_0}{m} \sum_{q,Q} \underline{A}(\underline{Q}) \cdot \hbar q \left\{ b^+_{q+\frac{Q}{2}} b_{q-\frac{Q}{2}} - b^+_{-(q-\frac{Q}{2})} b_{-(q+\frac{Q}{2})} \right\}$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} b^+_{q_1} b_{q_2} =$$

$$= \left(E^\lambda_{q_1} - E^\lambda_{q_2} \right) b^+_{q_1} b_{q_2} +$$

$$+ \frac{e_0}{m} \hbar \sum_{qQ} \underline{A}(\underline{Q}) \cdot q \left\{ b^+_{q+\frac{Q}{2}} b_{q_2} \delta\left(q - \frac{Q}{2} - q_1\right) - b^+_{q_1} b_{q-\frac{Q}{2}} \delta_{q+\frac{Q}{2}, q_2} \right.$$
$$- b^+_{-(q-\frac{Q}{2})} b_{q_2} \delta_{-(q+\frac{Q}{2}), q_1}$$
$$\left. + b^+_{q_1} b_{-(q+\frac{Q}{2})} \delta_{-(q-\frac{Q}{2}), q_2} \right\}$$

Werte q-Summe aus

$$= \left(E^\lambda_{q_1} - E^\lambda_{q_2} \right) b^+_{q_1} b_{q_2} + \frac{e_0}{m} \hbar \sum_Q \underline{A}(\underline{Q}) \cdot \{ \qquad \}$$

$$\{ \quad \} = b^+_{q_1+Q} b_{q_2} \left(q_1 + \frac{Q}{2} \right) - b^+_{q_1} b_{q_2-Q} \left(k_2 - \frac{Q}{2} \right)$$
$$- b^+_{q_1+Q} b_{q_2} \left(-\frac{Q}{2} - q_1 \right) + b^+_{q_1} b_{q_2-Q} \left(-k_2 + \frac{Q}{2} \right)$$

nur diagonale Beiträge

d.h. $\delta_{Q, k_1 - k_2}$

$$= \left(E^\lambda_{q_1} - E^\lambda_{q_2} \right) b^+_{q_1} b_{q_2} + \frac{e_0}{m} \hbar \{ --- \}$$

$$\{\dots\} = b^+_{q_2} b_{q_2}\left(\underline{k}_1 + \frac{(-\underline{q}_1+\underline{q}_2)}{2}\right)\cdot \underline{A}(\underline{q}_2-\underline{k}_1)$$

$$- \dots + \dots$$

$$= (E^\wedge_{q_1} - E^\wedge_{q_2})\, b^+_{q_1} b_{q_2} + \frac{2 e_0 \hbar}{m}\left\{ b^+_{q_2} b_{q_2} - b^+_{q_1} b_{q_1}\right\} \frac{(\underline{k}_2+\underline{k}_1)}{2}\cdot \underline{A}(\underline{k}_2-\underline{k}_1)$$

Limes $\partial_t \langle b^+_{q_1} b_{q_2}\rangle = 0$ (stationäres Problem)

$$\langle b^+_{q_2} b_{q_1}\rangle = \frac{2 e_0 \hbar}{m}\underline{A}(\underline{q}_2-\underline{k}_1)\cdot\left(\frac{\underline{k}_1+\underline{k}_2}{2}\right)\underbrace{\left\{\frac{\langle b^+_{q_2} b_{q_2}\rangle - \langle b^+_{q_1} b_{q_1}\rangle}{E^\wedge_{q_1} - E^\wedge_{q_2}}\right\}}_{\substack{\text{Differentialquotient} \\ k_1 \to k_2}}$$

$$\lim_{\underline{k}_1\to\underline{k}_2} \langle b^+_{q_2} b_{q_1}\rangle = \frac{2 e_0 \hbar}{m}\underline{A}(\underline{0})\cdot\underline{k}_2 \frac{\partial\langle b^+_{q_1} b_{q_2}\rangle}{\partial E^\wedge_{q_2}}$$

$$\langle b^+_q b_q\rangle = \frac{2 e_0\hbar}{m}\underbrace{\underline{A}(\underline{0})}_{\underline{A}_0}\cdot q\,\frac{\partial\langle b^+_q b_q\rangle}{\partial E^\wedge_q}$$

d.h. Quantenkinetik für den allereinfachsten Fall gelöst

$$j = -\frac{e_0\hbar^2}{mV}\sum_q q\,\frac{2e_0}{m}\, q\cdot\underline{A}_0\,\frac{\partial f_q}{\partial E_q} - \frac{e_0^2}{m}\underline{A}_0 N_F$$

keine Dynamik, da Problem 1. Ordnung in $|A|$ gelöst wird

f_q ist Fermifkt. für
normalleitenden Fall $E_q = \varepsilon_q - \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$
supraleitenden Fall $E_q = (\Delta^2 + \varepsilon_q^2)^{\frac{1}{2}}$

Betrachte nun Strom in Richtung des Vektorpotentials

$$j_A = j \cdot \frac{A_0}{|A_0|} =$$

$$= \underbrace{-\frac{2e_0^2\hbar^2}{m^2V}\sum_q \frac{(\Delta q)^3}{(\Delta q)^3}(q\cdot A_0)^2\frac{1}{|A_0|}\frac{\partial f_q}{\partial E_q}}_{= (A)} - \frac{e_0^2}{m}\frac{A_0\cdot A_0}{|A_0|}N_F$$

$$(A) = -\frac{2e_0^2\hbar^2}{m^2V}\underbrace{\frac{1}{(\Delta q)^3}}_{=\left[\frac{(2\pi)^3}{V}\right]^{-1}}\int_0^\infty dq\, q^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}_{=-\int_{1}^{-1} dx\, x^2 \,=\, \frac{2}{3}}\, q^2 |A_0| \frac{\partial f_q}{\partial E_q}$$

$x = \cos\vartheta$

$dx = -\sin\vartheta\, d\vartheta$

$$= \frac{2e_0^2\hbar^2}{m^2V}\frac{4}{3}\pi\frac{A_0V}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dq\, q^4\left[-\frac{\partial f_q}{\partial E_q}\right]$$

$$\overset{T=0}{=} -\frac{\partial}{\partial E_q}\Theta(E_F - E_q) = \frac{\partial}{\partial(-E_q)}\Theta(E_F - E_q) = \delta(E_q - E_F)$$

$$= \frac{e_0^2\hbar^2}{m^2}\frac{A_0}{3\pi^2}\int_0^\infty dq\, q^4\,\delta(E_q - E_F)$$

$q = \sqrt{2mE_q/\hbar^2}$

$E_q = \frac{\hbar^2 q^2}{2m}$, $dE = \frac{\hbar^2 q\, dq}{m}$

$dq = \frac{m}{\hbar^2 q} dE$

$$= \frac{e_0^2\hbar^2}{m^{\cancel{2}}}\frac{A_0}{3\pi^2}\int_0^\infty dE\frac{\cancel{m}}{\hbar^2}q^3\,\delta(E_q - E_F)$$

$$= \frac{e_0^2 A_0}{3m\pi^2}\int_0^\infty dE\left(\frac{2mE_q}{\hbar^2}\right)^{3/2}\delta(E_q - E_F)$$

$$= \frac{e_0^2 A_0}{m 3\pi^2}\left(\frac{2mE_F}{\hbar^2}\right)^{3/2} = \frac{e_0^2 A_0}{m\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2}$$

$$= \frac{e_0^2 A_0}{m}\frac{q_F^3}{3\pi^2}$$

$$A = \frac{e_0^2 A_0}{m}\rho_F$$

$$j_A = A - \frac{e_0^2 A_0}{m} n_F$$

$$= 0$$

d.h. im nl Fall fließt kein Strom, da kein Feld angelegt ist

wieviele Moden passen in die Fermikugel

$$2\sum_q^{q_F}\frac{(\Delta q)^3}{(\Delta q)^3} = N_F$$

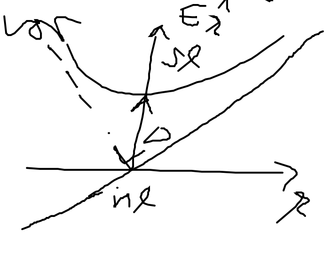
$$= \frac{2}{(\Delta q)^3}\underbrace{\int_0^{q_F} dq\, q^2}_{\downarrow}\;\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} d\vartheta\,\sin\vartheta}_{=4\pi}$$

$$= \frac{2V}{(2\pi)^3}\,4\pi\,\frac{q_F^3}{3} = V\frac{q_F^3}{3\pi^2}$$

d.h. $\frac{N_F}{V} = \rho_F \longrightarrow \rho_F = \frac{q_F^3}{3\pi^2}$

supraleitender Fall: $E_q^1 = (\Delta^2 + \varepsilon_q^2)^{1/2}$

f_q ist auch Fermifkt., es liegt aber eine Energielücke vor



$$\frac{\partial f}{\partial E_q} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial E_q}$$

$$= -\delta(\varepsilon_F - \varepsilon)\frac{E_q^1}{\sqrt{E_q^2 - \Delta^2}} \xrightarrow{T=0} 0$$

weil keine Besetzung $T = 0$

$(A) = 0$ (kompensierender Teil fällt weg)

$$j_A = (A) - \frac{e_0^2}{m} A_0 n_F = -\frac{e_0^2}{m} n_F A_0$$

es bleibt ein Strom, obwohl kein Feld angelegt ist

$\rightarrow$ erklärt beobachtbare Effekte wie den Meissner-Effekt