Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/ARTI/

4. Juli 2006

10. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 11.07.06 vor der Übung

Aufgabe 1 (4+1 Punkte): *Schwarzschild-Metrik und Kruskal-Koordinaten*
Die Schwarzschild-Metrik ist definiert durch:

$$\mathbf{g} = (1 - \frac{2M}{r})dt^2 - (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2).$$

Führen Sie die Koordinaten-Transformationen für $r > 2M$

$$\begin{aligned} u &= -\sqrt{r/(2M) - 1}e^{(r-t)/(4M)} \\ v &= \sqrt{r/(2M) - 1}e^{(r+t)/(4M)} \end{aligned}$$

durch und berechnen Sie in diesem Koordinatensystem die Metrik. *Tipp: Benutzen Sie die Funktion $r(u, v)$, indem Sie zeigen, dass man r implizit (Gleichung aufschreiben!) durch die neuen Koordinaten ausdrücken kann!*
Zeigen Sie, dass die Metrik in diesen Koordinaten für $r \to 2m$ wohldefiniert und nicht singulär ist.
(2 Zusatzpunkte:) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $X = u\partial_u + v\partial_v$ ein *Killing-Vektorfeld* ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Robertson-Walker-Metrik*
Die Robertson-Walker-Metrik ist definiert durch:

$$\mathbf{g} = dt^2 - R(t)^2\big(\frac{1}{1 - kr^2}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\big).$$

Berechnen Sie den Ricci-Tensor, der zu dieser Metrik gehört und zeigen Sie insbesondere, dass dieser diagonal ist. Berechnen Sie den Ricci-Skalar und zeigen Sie, dass dieser nur von der Zeit t abhängt.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte): *Weyl-Tensor*
Die Lösung der Vakuumfeldgleichungen denkt besitzen einen Krümmungstensor, dessen Ricci-Tensor identisch Null ist. Da der Raum dennoch gekrümmt ist, kann man sich fragen, welche Komponenten des Krümmungstensors *nicht* in die Einstein'schen Gleichungen eingehen. Diese Komponenten können tatsächlich im sog. **Weyl-Tensor** C_{abcd} zusammengefasst werden, der definiert ist als

$$C^{ab}{}_{cd} = R^{ab}{}_{cd} - 2g^{[a}{}_{[c}R^{b]}{}_{d]} + \frac{R}{3}g^{a}{}_{[c}g^{b}{}_{d]}. \tag{1}$$

(Ricci-Tensor und Ricci-Skalar sind wie üblich definiert). Dieser Weyl-Tensor „erbt“ die Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors, darüber hinaus aber eine weitere: zeigen Sie, dass der Tensor *spurfrei* ist, d.h. $C^{ab}{}_{ad} = 0$ gilt.
Zeigen Sie, dass für die Schwarzschild-Metrik $R_{\mu\nu} = 0$, aber $C^{ab}{}_{cd} \neq 0$ gilt.
(2 Zusatzpunkte:) Zeigen Sie, dass für die Robertson-Walker-Metrik genau das Gegenteil der Fall ist, d.h. i. Allg. $R_{\mu\nu} \neq 0$, aber $C^{ab}{}_{cd} = 0$