Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

9. Mai 2006

2. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 17.05.06 vor der Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte): *Invarianz der Minkowski-Metrik unter Lorentz-Transformationen*

Zeigen Sie, dass die Minkowski-Metrik

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Lorentz-Transformation

$$L^0_0 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad L^0_k = \gamma\frac{v_k}{c} \qquad L^k_0 = \gamma\frac{v^k}{c} \qquad L^j_k = \delta^j_k + (\gamma-1)\frac{1}{v^2}v^j v_k$$

eine numerische Invariante ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Additionstheorem der Geschwindigkeiten*

Leiten Sie unter Benutzung der oben angegebenen Lorentz-Transformation das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$u'_{\parallel} = \frac{u_{\parallel} + v}{1 + \frac{vu_{\parallel}}{c^2}}; \qquad \mathbf{u}'_{\perp} = \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{\gamma(1 + \frac{vu_{\parallel}}{c^2})}$$

ab, wobei $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ den Dreiervektor der Geschwindigkeit, $u_{\parallel}$ den Anteil parallel zu $\mathbf{v}$ sowie $\mathbf{u}_{\perp}$ den senkrechten Anteil (jeweils analog im gestrichenen Inertialsystem) bezeichne, und $\gamma = \sqrt{1 + v^2/c^2}$ sei. Diskutieren Sie die Näherung für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$. Zeigen Sie, dass im relativistischen Fall keine resultierende Geschwindigkeit größer c möglich ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte): *Energie-Impuls-Beziehung und Dynamik*

Zeigen Sie mit Hilfe der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, dass aus dem Newton'schen Gesetz im Minkowski-Raum

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \tag{1}$$

folgt, dass der Viererimpuls und die Viererkraft immer senkrecht aufeinander stehen.