Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

9. Mai 2006

2. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 17.05.06 vor der Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte): *Invarianz der Minkowski-Metrik unter Lorentz-Transformationen*

Zeigen Sie, dass die Minkowski-Metrik

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Lorentz-Transformation

$$L_0^0 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad L_k^0 = \gamma \frac{v_k}{c} \qquad L_0^k = \gamma \frac{v^k}{c} \qquad L_k^j = \delta_k^j + (\gamma - 1)\frac{1}{v^2} v^j v_k$$

eine numerische Invariante ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Additionstheorem der Geschwindigkeiten*

Leiten Sie unter Benutzung der oben angegebenen Lorentz-Transformation das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$u'_\parallel = \frac{u_\parallel + v}{1 + \frac{v u_\parallel}{c^2}}; \qquad \mathbf{u}'_\perp = \frac{\mathbf{u}_\perp}{\gamma(1 + \frac{v u_\parallel}{c^2})}$$

ab, wobei $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ den Dreiervektor der Geschwindigkeit, $u_\parallel$ den Anteil parallel zu $\mathbf{v}$ sowie $\mathbf{u}_\perp$ den senkrechten Anteil (jeweils analog im gestrichenen Inertialsystem) bezeichne, und $\gamma = \sqrt{1 + v^2/c^2}$ sei. Diskutieren Sie die Näherung für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$. Zeigen Sie, dass im relativistischen Fall keine resultierende Geschwindigkeit größer c möglich ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte): *Energie-Impuls-Beziehung und Dynamik*

Zeigen Sie mit Hilfe der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, dass aus dem Newton'schen Gesetz im Minkowski-Raum

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \tag{1}$$

folgt, dass der Viererimpuls und die Viererkraft immer senkrecht aufeinander stehen.

Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

9. Mai 2006

2. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 17.05.06 vor der Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte): ***Invarianz der Minkowski-Metrik unter Lorentz-Transformationen***

Zeigen Sie, dass die Minkowski-Metrik

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Lorentz-Transformation

$$L_0^0 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad L_k^0 = \gamma\frac{v_k}{c} \qquad L_0^k = \gamma\frac{v^k}{c} \qquad L_k^j = \delta_k^j + (\gamma - 1)\frac{1}{v^2}v^j v_k$$

eine numerische Invariante ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte): ***Additionstheorem der Geschwindigkeiten***

Leiten Sie unter Benutzung der oben angegebenen Lorentz-Transformation das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten

$$u'_{\parallel} = \frac{u_{\parallel} + v}{1 + \frac{vu_{\parallel}}{c^2}}; \qquad \mathbf{u}'_{\perp} = \frac{\mathbf{u}_{\perp}}{\gamma(1 + \frac{vu_{\parallel}}{c^2})}$$

ab, wobei $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$ den Dreiervektor der Geschwindigkeit, $u_{\parallel}$ den Anteil parallel zu $\mathbf{v}$ sowie $\mathbf{u}_{\perp}$ den senkrechten Anteil (jeweils analog im gestrichenen Inertialsystem) bezeichne, und $\gamma = \sqrt{1 + v^2/c^2}$ sei. Diskutieren Sie die Näherung für kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$. Zeigen Sie, dass im relativistischen Fall keine resultierende Geschwindigkeit größer c möglich ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte): ***Energie-Impuls-Beziehung und Dynamik***

Zeigen Sie mit Hilfe der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung, dass aus dem Newton'schen Gesetz im Minkowski-Raum

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = F^\alpha \tag{1}$$

folgt, dass der Viererimpuls und die Viererkraft immer senkrecht aufeinander stehen.