Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/ARTI/

16. Mai 2006

3. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 23.05.03 vor der Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte): *Bahndrehimpuls des elektromagnetischen Feldes*

Der Bahndrehimpuls $M^{\alpha\beta\gamma}$ des elektromagnetischen Feldes ist definiert als

$$M^{\alpha\beta\gamma} := T^{\alpha[\beta}x^{\gamma]}, \tag{1}$$

dabei bezeichnet $T^{\alpha\beta}$ den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes.
Zeigen Sie, dass die Drehimpulsbilanz des elektromagnetischen Feldes

$$M^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\alpha} = j^{\alpha}F_{\alpha}{}^{[\beta}x^{\gamma]} \tag{2}$$

ist.
Für welche physikalisch sinnvollen Fälle gilt die Drehimpulserhaltung $M^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\alpha} = 0$?

Aufgabe 2 (6 Punkte): *Maxwellsche Gleichungen in 4-er Schreibweise*

Zeigen Sie im *Ricci-Kalkül* oder mit Hilfe von *Differentialformen*, dass die 4-er Schreibweise der Maxwellschen Gleichungen:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c}j^\beta \qquad \Big(\Longleftrightarrow \qquad \delta F = \frac{4\pi}{c}j\Big) \tag{3}$$

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\partial^\beta F^{\gamma\delta} = 0 \qquad \Big(\Longleftrightarrow \qquad dF = 0\Big) \tag{4}$$

mit

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

(wobei $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ gilt) und $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$, bzw. $j_\mu = (c\rho, -\mathbf{j})$ und $j = j_\mu dx^\mu$, für Gleichung (3) den Maxwellschen Gleichungen

$$div\mathbf{E} = 4\pi\rho \quad ; \quad rot\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

und für Gleichung (4)

$$div\mathbf{B} = 0 \quad ; \quad rot\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

entspricht. Dabei bezeichnet $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ das Levi-Civita-Symbol mit den Eigenschaften:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 \text{ falls } \alpha\beta\gamma\delta \text{ gerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ -1 \text{ falls } \alpha\beta\gamma\delta \text{ ungerade Permutation von } (0,1,2,3) \\ 0 \text{ sonst} \end{cases} . \tag{5}$$