Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/ARTI/

23. Mai 2006

4. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 30.05.03 vor der Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte): *Rindler-Koordinaten*

Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$x^0 = (x'^1 + \frac{1}{a})\sinh(ax'^0) \quad x^1 = (x'^1 + \frac{1}{a})\cosh(ax'^0) \quad x^2 = x'^2 \quad x^3 = x'^3 \tag{1}$$

die den Übergang in ein Nichtinertialsystem Σ' aus Minkowski Raum beschreibt (a ist eine Konstante).

a) Bestimmen Sie den Komponenten des metrischen Tensors

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}\eta_{\rho\kappa}$$

für die durch die Transformation (1) implizierten Koordinaten.

(b) Geben Sie die Komponenten des kontravarianten metrischen Tensors, welcher über $g_{\alpha\beta}g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$ definiert ist, an (die Striche an den Größen im Koordinatensystem Σ' sind hier und im Folgenden ausgespart!).

(c) Berechnen Sie alle Christoffelsymbole

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(g_{\beta\rho,\gamma} + g_{\rho\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\rho})$$

für diese Koordinaten. Nutzen Sie deren Symmetrie im unteren Indexpaar aus.

(d) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung eines freien Teilchens (Geodätengleichung)

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 \tag{2}$$

in den Koordinaten Σ' die Form

$$\frac{d^2x^0}{d\tau^2} + 2\frac{a}{(1+ax^1)}\frac{dx^1}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau} = 0$$
$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + a(1+ax^1)\frac{dx^0}{d\tau}\frac{dx^0}{d\tau}\delta^i_1 = 0$$

annimmt.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Transformationsverhalten der Christoffelsymbole*

Zeigen Sie, dass für die Transformation der Christoffelsymbole folgende Beziehung gilt

$$\Gamma'^m_{tk} = A^m{}_n\bar{A}^r{}_t\bar{A}^s{}_k\Gamma^n_{rs} - A^m{}_l\bar{A}^l{}_{t,k}.$$

Benutzen Sie dazu die Transformationsvorschrift $\frac{dx'^m}{d\tau} = A^m{}_n\frac{dx^n}{d\tau}$ und beachten Sie, dass die Geodätengleichung (2) in jedem Koordinatensystem die gleiche Form besitzt.