Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/ARTI/

30. Mai 2006

5. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 06.06.03 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Zweite kovariante Ableitung*
Betrachten Sie ein beliebiges Koordinatensystem im Minkowski-Raum und ein kovariantes Vektorfeld A_α.

1. Berechnen Sie darin den Ausdruck für die *zweite kovariante Ableitung* $A_{\alpha;\beta;\gamma}$, der diese durch partielle Ableitungen und Christoffel-Symbole darstellt.

2. Berechnen Sie daraus die antisymmetrisierte zweite kovariante Ableitung $A_{\alpha;[\beta;\gamma]}$ und zeigen Sie, dass dieser Tensor von der Form ${R^\delta}_{\alpha\gamma\beta} A_\delta$ ist, wobei ${R^\delta}_{\alpha\gamma\beta}$ *nicht* von A_σ abhängt.

3. Argumentieren Sie schlüssig, warum ${R^\delta}_{\alpha\gamma\beta}$ ein Tensor ist, und warum dieser identisch verschwindet.

Aufgabe 2 (5+2 Punkte): *Ein erster krummer Raum*
Wir wollen in dieser Aufgabe ein erstes Beispiel eines gekrümmten Raumes untersuchen. Wir betrachten dazu die Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$, die durch die Abbildung

$$\mathbf{F} : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \mapsto \mathbb{R}^3; (\phi, \theta) \to R(\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta)$$

gegeben ist, d.h. die Kugelschale vom Radius R.

1. Berechnen Sie die sog. *Gauß'sche Basis*, d.h. die Koordinatenvektorfelder $\partial_1 := \partial_\phi \mathbf{F}$ und $\partial_2 := \partial_\theta \mathbf{F}$.

2. Die *induzierte Metrik* der Kugelschale ist das Tensorfeld mit den Komponenten $g_{mn} := \langle \partial_m, \partial_n \rangle$, d.h. das euklidische Skalarprodukt der Koordinatenvektorfelder im $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie dieses Tensorfeld.

3. Berechnen Sie die Christoffelsymbole der induzierten Metrik (nur Γ^1_{12},Γ^1_{21} und Γ^2_{11} verschwinden nicht!).

4. Zeigen Sie, dass die *Breitenkreise* ($\theta =$const.) auf der Kugelschale nur für den Fall $\theta = \pi/2$ *(Äquator)* eine Geodäte bilden.

5. Zeigen Sie (z.B. durch ein Beispiel), dass der Tensor ${R^\delta}_{\alpha\gamma\beta}$ (aus der ersten Aufgabe auf diesem Zettel) *hier* nicht identisch Null ist und die zweite kovariante Ableitung eines Tensors daher i.Allg. nicht symmetrisch in den Ableitungsindizes ist.