Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/ARTI/

13. Juni 2006

6. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 13.06.03 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Die Symmetrien des Krümmungstensors*

Aus den Christoffelsymbolen und deren partiellen Ableitungen wird der Riemannsche Krümmungstensor definiert durch

$$R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\delta\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\beta\delta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\sigma}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$R^{\alpha}{}_{[\beta\gamma\delta]} = R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} + R^{\alpha}{}_{\delta\beta\gamma} + R^{\alpha}{}_{\gamma\delta\beta} = 0.$$

Benutzen Sie dabei die Symmetrie der Christoffelsymbole.
b) Zeigen Sie die Antisymmetrie im vorderen Indexpaar.
Der Beweis ist einfach wenn man die Definition des Krümmungstensors verwendet. Man zeigt dann, dass der symmetrische Teil verschwindet.
c) Zeigen Sie die Symmetrie $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Bianchi Identitäten*

Zusätzlich zu den oben beschriebenen algebraischen Identitäten des Krümmungstensors (1) existiert im Riemannschen Raum die Differentialidentität

$$R^{\alpha}{}_{\beta[\gamma\delta;\sigma]} = 0 \tag{2}$$

für den Krümmungstensor, die so genannte Bianchi Identität.
a) Zeigen Sie, dass Gleichung (2) gilt. Es ist recht unangenehm dies durch schlichtes Ausrechnen zu zeigen - aber machbar. Einfach ist dies zu zeigen, wenn man lokal geodätische Koordinaten benutzt. Wenn diese benutzt werden, hätte ich dazu aber gerne eine kurze Erklärung.
b) Leiten Sie aus Gleichung (2) die so genannte kontrahierte Bianchi Identität

$$(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg^{\alpha\beta})_{;\beta} = 0$$

ab. Hier bezeichnen $R_{\alpha\beta} := R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}$ den Ricci-Tensor und $R := R_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = R^{\alpha}{}_{\alpha}$ den Krümmungssalar.