

## 7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

**Abgabe:** Dienstag 20.06.06 vor der Übung

### Aufgabe 1 (4 Punkte): Paralleltransport

- Zeigen Sie, dass der Paralleltransport von Vektoren längs einer Kurve  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  eine Isometrie der Tangentialräume  $T_{\gamma(0)}$  und  $T_{\gamma(T)}$  ist, d.h. die Abbildung ist linear und erfüllt  $(g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu)|_{\gamma(0)} = (g_{\mu\nu} X_\parallel^\mu Y_\parallel^\nu)|_{\gamma(T)}$ , wobei  $X_\parallel^\mu$  und  $Y_\parallel^\nu$  die parallel transportierten Vektoren bezeichnet.
- Zeigen Sie, dass der Tangentenvektor  $t^\alpha = \frac{d\gamma^\alpha}{d\tau}$  an eine Geodäte einem Paralleltransport unterliegt.

### Aufgabe 2 (4 Punkte): Freies Teilchen

Ein freies Teilchen bewegt sich im Minkowski-Raum auf einer Geodäte. Die Bewegungsgleichung lässt sich, wie man leicht sieht, aus der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}(x^\alpha, v^\alpha) = \eta_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$  ableiten. Zeigen Sie, dass auch auf einer allgemeinen Riemann'schen Mannigfaltigkeit die Variation des Wirkungsintegrals mit Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(x^\alpha, v^\alpha) = g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

auf die Geodätengleichung führt. Im Gegensatz zur Variation des Bogenlängenfunktional ist dabei keine *a priori* Annahme über die Parametrisierung der Lösungskurve nötig!

### Aufgabe 3 (4 Punkte): Maxwell-Gleichungen in der ART

Nach dem Einstein'schen Äquivalenzprinzip werden physikalische Gleichungen aus der SRT in Die ART überführt, indem wir die Gleichungen *kovariant* schreiben und dabei insbesondere partielle Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzen. Wir wollen uns im Folgenden anschauen, warum dies u.U. zu Problemen führen kann, wenn zweite Ableitungen ins Spiel kommen.

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind in der SRT durch

$$F^{\alpha\beta}_{,\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$$

gegeben. Führen wir ein Viererpotential ein und fordern Lorentzeichnung  $A_{;\alpha}^\alpha = 0$  erhalten wir damit eine Wellengleichung für  $A^\alpha$ .

In der ART lauten diese Maxwell-Gleichungen

$$F^{\alpha\beta}_{;\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$$

und es sei  $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$ . Zeigen Sie, dass mit der Bedingung  $A_{;\alpha}^\alpha = 0$  anstelle der Wellengleichung die Gleichung

$$A^{\beta;\alpha}_{;\alpha} - R^\beta_\alpha A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\beta,$$

in der der Ricci-Tensor unschönerweise auftaucht.