Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/ARTI/

13. Juni 2006

7. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 20.06.06 vor der Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte): *Paralleltransport*

- Zeigen Sie, dass der Paralleltransport von Vektoren längs einer Kurve $\gamma : [0,T] \to M$ eine *Isometrie* der Tangentialräume $T_{\gamma(0)}$ und $T_{\gamma(T)}$ ist, d.h. die Abbildung ist linear und erfüllt $(g_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu)|_{\gamma(0)} = (g_{\mu\nu}X^\mu_\parallel Y^\nu_\parallel)|_{\gamma(T)}$, wobei $X^\mu_\parallel$ und $Y^\nu_\parallel$ die parallel transportierten Vektoren bezeichnet.
- Zeigen Sie, dass der Tangentenvektor $t^\alpha = \frac{d\gamma^\alpha}{d\tau}$ an eine Geodäte einem Paralleltransport unterliegt.

Aufgabe 2 (4 Punkte): *Freies Teilchen*

Ein freies Teilchen bewegt sich im Minkowski-Raum auf einer Geodäte. Die Bewegungsgleichung lässt sich, wie man leicht sieht, aus der *Lagrange-Funktion* $\mathcal{L}(x^\alpha, v^\alpha) = \eta_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ ableiten. Zeigen Sie, dass auch auf einer allgemeinen Riemann'schen Mannigfaltigkeit die Variation des Wirkungsintegrals mit *Lagrange-Funktion*

$$\mathcal{L}(x^\alpha, v^\alpha) = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$$

auf die Geodätengleichung führt. Im Gegensatz zur Variation des Bogenlängenfunktionals ist dabei keine *a priori* Annahme über die Parametrisierung der Lösungskurve nötig!

Aufgabe 3 (4 Punkte): *Maxwell-Gleichungen in der ART*
Nach dem Einstein'schen Äquivalenzprinzip werden physikalische Gleichungen aus der SRT in Die ART überführt, indem wir die Gleichungen *kovariant* schreiben und dabei insbesondere partielle Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzen. Wir wollen uns im Folgenden anschauen, warum dies u.U. zu Problemen führen kann, wenn zweite Ableitungen ins Spiel kommen.
Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen sind in der SRT durch

$$F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$$

gegeben. Führen wir ein Viererpotential ein und fordern Lorentzeichung $A^\alpha_{,\alpha} = 0$ erhalten wir damit eine Wellengleichung für A^α.
In der ART lauten diese Maxwell-Gleichungen

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\beta$$

und es sei $F_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu}$. Zeigen Sie, dass mit der Bedingung $A^\alpha_{;\alpha} = 0$ anstelle der Wellengleichung die Gleichung

$$A^{\beta;\alpha}{}_{;\alpha} - R^\beta{}_\alpha A^\alpha = \frac{4\pi}{c} j^\beta,$$

in der der Ricci-Tensor unschönerweise auftaucht.