Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/ARTI/

20. Juni 2006

# 8. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

**Abgabe: Dienstag 27.06.06** vor der Übung

**Aufgabe** 1 (5 Punkte): *Lie-Ableitung*
Zeigen Sie, dass für die *Lie-Ableitung* eines Tensorfeldes $\mathrm{T}$ in Richtung des Vektorfeldes $X$ folgende Rechenregeln gelten.

- Sei $f$ eine skalare Funktion. Dann ist

$$\mathcal{L}_{fX}\,\mathrm{T} = f\mathcal{L}_X\,\mathrm{T} + \mathrm{T}\,df(X)$$

- Sei $\mathrm{S}$ ein weiteres Tensorfeld

$$\mathcal{L}_X(\mathrm{T}\otimes\mathrm{S}) = \mathcal{L}_X(\mathrm{T})\otimes\mathrm{S} + \mathrm{T}\otimes\mathcal{L}_X(\mathrm{S})$$

- Sei $Y$ ein weiteres Vektorfeld. Mit $\mathcal{L}_X Y =: [X,Y]$ gilt:

$$\mathcal{L}_{[X,Y]}\,\mathrm{T} = \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\,\mathrm{T} - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\,\mathrm{T}$$

- Zeigen Sie, dass man aufgrund der Symmetrie der Zusammenhangskoeefizienten (Christoffel-Symbole), in der Berechnungsvorschrift für die Lie-Ableitung sämtliche partiellen Ableitungen durch kovariante Ableitungen ersetzen darf.

**Aufgabe** 2 (5+3 Punkte): *Killing-Vektorfelder*
Killing-Vektoren kennzeichnen die Symmetrie einer Raumzeit. Sie sind durch die Gleichung $(\mathcal{L}_\xi g)_{\mu\nu} = 0$ definiert und ergeben sich als Lösung der Killing-Gleichung

$$\xi_{(\alpha;\beta)} = 0. \tag{1}$$

- Zeigen Sie, dass für einen Killing-Vektor $\xi = \xi^\alpha\partial_\alpha$ gilt

$$\xi_{\nu;\lambda;\mu} = R^\kappa{}_{\mu\lambda\nu}\xi_\kappa. \tag{2}$$

  Benutzen Sie dazu die für jeden Vektor gültige Gleichung

$$A_{\alpha;[\beta;\gamma]} = R^\delta{}_{\alpha\gamma\beta}A_\delta \tag{3}$$

  und die Gleichung

$$R^\alpha{}_{[\beta\gamma\delta]} = 0. \tag{4}$$

- (3 Zusatzpunkte) Auf der Kugelschale vom Radius $R$

$$\mathbf{F} : (0,2\pi)\times(0,\pi) \mapsto \mathbb{R}^3; (\phi,\theta) \to R(\cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta)$$

  wurde auf Übungsblatt 5 die Metrik $g$ und die Christoffelsymbole in Kugelkoordinaten berechnet. Bestimmen Sie nun den Ricci-Tensor $R_{\mu\nu} = R^\delta{}_{\mu\delta\nu}$ und die Skalarkrümmung $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, sowie drei linear unabhängige Killingvektorfelder (Tipp: an die Symmetrien der Kugel denken und entsprechende Vektorfelder konstruieren).