Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. v. Borzeszkowski
T. Chrobok

http://wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/ARTI/

27. Juni 2006

9. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Abgabe: Dienstag 04.07.06 vor der Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte): *Killing-Felder und Krümmung*
Ein Killing-Vektorfeld ξ erfüllt die Gleichung $\mathcal{L}_\xi \mathbf{g}$. Benutzen Sie Killing-Gleichung, die Bianchi-Identität und die Gleichung $\xi_{\nu;\lambda;\mu} = R^\kappa{}_{\mu\lambda\nu}\xi_\kappa$ (vom letzten Blatt), um zu zeigen:

- Der Ricci-Skalar R ist längs des Killing-Feldes konstant, d.h. $\mathcal{L}_\xi R = \xi^\alpha R_{,\alpha} = 0,$
- oder alternativ mit 2 Zusatzpunkten: Die Lie-Ableitung des Krümmungstensors in Richtung des Killingfeldes verschwindet identisch , d.h. $(\mathcal{L}_\xi \mathbf{R})^\kappa{}_{\mu\lambda\nu} = 0.$

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Killing-Vektoren und Erhaltungssätze*

- Betrachten Sie die geodätische Bewegung eines Massepunktes im Riemanns'chen Raum. Die Bewegungsgleichung lässt sich, wie wir auf dem 7. Blatt gesehen haben, aus der *Lagrange-Funktion* $\mathcal{L}(x^\alpha, v^\alpha) = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ ableiten. Der Raum sei nun zusätzlich mit einer Anzahl K von Killingvektoren $\overset{k}{\xi}_\alpha$ ausgestattet. Zeigen Sie, dass dann eine Anzahl K von Erhaltungsgrößen (sog. *Impulse*) $P_k(x^\alpha, v^\alpha)$ der Form $\overset{k}{\xi}_\alpha u^\alpha = const$ existieren (d.h. $\frac{d}{dt}P_k((x^\alpha(t), \dot{x}^\alpha(t)) = 0$ längs Lösungskurven). Erklären Sie den Zusammenhang mit dem Noether-Theorem.
- Ein besonders einfacher Riemannscher Raum ist der Minkowski-Raum. Zeigen Sie mit Hilfe der folgenden Form der Killing-Gleichung

$$g_{\alpha\beta,\sigma}\xi^\sigma + 2g_{\lambda(\alpha}\xi^\lambda_{,\beta)} = 0,$$

dass der Minkowski-Raum 10 linear unabhängige Killing-Vektorfelder besitzt. Identifizieren Sie diese mit den bekannten Symmetrien des Minkowski-Raumes und benennen Sie diese.