

2. Übungsblatt zur Quanteninformationstheorie I u. II

Nächste Übung: Do., 25.05.06, 16:15, Raum PN731

Aufgabe 4 (3 Punkte): Die Zustände ρ eines Quantensystems sind durch die konvexe Menge der positiven Spuklasseoperatoren mit $\text{tr} \rho = 1$ eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ gegeben.

4.1 Man zeige, dass $\text{tr} \rho^2 = 1$ die Extrempunkte dieser konvexen Menge charakterisiert.

4.2 Man zeige, dass jeder Dichteoperator des $\mathbf{C}^2$ in der Form $\rho = (1/2)(1 + x \cdot \sigma)$ geschrieben werden kann, wobei $x \in \mathbf{R}^3$, $\|x\| \leq 1$, σ_i die Paulimatrizen sind, $x \cdot \sigma = \sum x_i \sigma_i$ ist und $x \mapsto \rho$ affin und bijektiv ist (Blochkugel).

4.3 Man zeige, dass die Extrempunkte der Blochkugel (Blochshäre) mit den Zuständen $\psi = \cos(\Theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\Theta/2)|1\rangle$ korrespondieren, wobei (Θ, φ) die Polarkoordinaten des Punktes sind.

Aufgabe 5 (3 Punkte): Die Zerlegung eines gemischten Zustandes in reine Komponenten ist nicht eindeutig. Seien $\psi_i, (i = 1, 2, \dots, M)$, $\varphi_k, (k = 1, 2, \dots, K)$, $\|\psi_i\| = \|\varphi_k\| = 1$, sonst beliebig in $\mathcal{H}$. Man betrachte

$$\rho = \sum p_i \psi_i, \quad \sigma = \sum q_k \varphi_k \quad (p_i, q_k > 0, \sum p_i = \sum q_k = 1)$$

und zeige: Es gilt $\rho = \sigma$ genau dann, wenn es mit $\tilde{\psi}_i := \sqrt{p_i} \psi_i$ und $\tilde{\varphi}_k := \sqrt{q_k} \varphi_k$ Zahlen $u_{ik} \in \mathbf{C}$ gibt, so dass

$$\tilde{\psi}_i = \sum_k u_{ik} \tilde{\varphi}_k \quad \text{und} \quad \sum_i \bar{u}_{ik} u_{ij} = \delta_{kj}$$

ist. (*Hinweis:* Dass das Kriterium hinreichend ergibt sich durch einfaches Vorwärtsrechnen, um seine Notwendigkeit zu zeigen, denke man sich $\rho = \sigma$ spektral zerlegt.)

Aufgabe 6 (4 Punkte): Die Kommutatoralgebra der spurfreien antihermiteschen 2×2 Matrizen ist zur Lie-Algebra der Drehgruppe isomorph. Um diese Isomorphie konkret zu machen, identifiziere man die $(i/2)\sigma_k$, $k = 1, 2, 3$ mit den Erzeugenden der Drehungen um die jeweilige Koordinatenachse. **Man berechne** die Matrizen der Spindrehungen um die $\mathbf{e}$ -Achse im positiven Sinn durch Aufsummieren der Exponentialreihe

$$R_{\mathbf{e}}(\phi) = e^{-(i/2)\mathbf{e} \cdot \sigma \phi}, \quad \mathbf{e} \in \mathbf{R}^3, \|\mathbf{e}\| = 1,$$

die mit den entsprechenden Drehungen im $\mathbf{R}^3$ zu identifizieren sind. (*Hinweis:* Es gilt $(\mathbf{e} \cdot \sigma)^2 = 1$.) Was bedeutet es, dass $R_{\mathbf{e}}(2\pi) = -1$ und erst $R_{\mathbf{e}}(4\pi) = 1$ ist?