Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. A. Knorr
Dipl-Phys. Philipp Hövel, Dipl-Phys. Philipp Zedler
Martin Kliesch

24. Mai 2006

wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/TPI

4. Übungsblatt zur Theoretischen Physik I

Abgabe: Montag 29. Mai 2006 bis 12:00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 10 (4 Punkte): *Hamiltonsche Gleichungen*
Mit dieser Aufgabe soll die Herleitung der Hamilton-Funktion aus der Vorlesung wiederholt werden:

10.1 Starte bei der Legendre-Transformation der Lagrange-Funktion:

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

Von welchen Variablen hängen L und H ab?

10.2 Definiere die generalisierten Impulse p_j und leite die Hamiltonschen Gleichungen her

10.3 Gib Anzahl und Grad im Fall der Euler-Lagrange-Gleichungen und Hamiltonschen Gleichungen an.

Aufgabe 11 (8 Punkte): *Hamilton-Funktion*
Aus der Vorlesung ist die Diplonäherung für ein gebundenes Teilchen bekannt. Betrachte nun ausgehend von der Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V_0(\vec{r}) - q\phi(\vec{r},t) + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r},t)$$

die Erzeugende

$$R = -q\vec{r} \cdot \vec{A}(0,t) - \frac{q}{2}\vec{r} \cdot \left[\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}|_{\vec{r}=0}\right) \vec{A}(\vec{r},t)\right].$$

Zeige, dass für die transformierte Lagrange-Funktion L' gilt:

$$L' = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - V_0 + q\vec{r} \cdot \vec{E}(0,t) + \frac{q}{2}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}(0,t)\right).$$

Dafür ist es günstig, das Vektorpotenzial $\vec{A}(\vec{r},t)$ aus L um $\vec{r} = 0$ bis zur ersten Ordnung zu entwickeln. Begründe die Vernachlässigung des Terms, der $\vec{r} \cdot \left[\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}|_{\vec{r}=0}\right) \partial_t \vec{A}(\vec{r},t)\right]$ enthält. Fasse danach alle aus der Vorlesung für die Diplonäherung bekannten Terme zusammen und zeige, dass für die restlichen Ausdrücke gilt:

$$\frac{q}{2}\left\{\dot{\vec{r}} \cdot \left[\left(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}|_{\vec{r}=0}\right) \vec{A}(\vec{r},t)\right] - \vec{r} \cdot \left[\left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla}|_{\vec{r}=0}\right) \vec{A}(\vec{r},t)\right]\right\} = \frac{q}{2}\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) \cdot \vec{B}(0,t).$$

Aufgabe 12 (0 Punkte): *Lagrange mit dem Computer (wird als Vorbereitung für Aufgabe 13 im Tutorium bearbeitet)*
Aus dem Tutorium ist das frei gleitende Pendel der Länge d bekannt. In dieser Aufgabe sollen die Bewegungsgleichungen dieses Systems numerisch hergeleitet und für verschiedene Anfangsbedingungen gelöst werden. Alle Teilaufgaben sind mit einem Computeralgebraprogramm (z.B. MATHEMATICA) zu bearbeiten. Gehe dazu folgendermaßen vor:

12.1 Implementiere die generalisierten Koordinaten.

12.2 Berechne die Lagrange-Funktion L ausgehend von ihrer Definition: $L = T - V$.

12.3 Bestimme mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichungen für die generalisierten Koordinaten.

Bitte Rückseite beachten!⟶

12.4 Löse die Bewegungsgleichungen für folgende Anfangswerte: a) Das Pendel ist am Anfang bei dem Punkt der größten Auslenkung (Umkehrpunkt der Bewegung); b) Das Pendel startet mit einer Anfangsgeschwindigkeit und außerhalb der Ruhelage. Die obere gleitende Masse in beiden Fällen sei halb so schwer wie die untere Masse.

12.5 Interpretiere die beiden Beweungsmuster aus 12.4 a) und b).

Aufgabe 13 (8 Punkte): *Hamilton mit dem Computer*
Betrachte ein Teilchen mit der Ladung q in einem $\vec{B}$-Feld, das durch das Vektorpotenzial $\vec{A}(t) = (0, x(t)B_0, 0)^T$ erzeugt wird ($B_0 = konst.$). Berechne mit einem Computeralgebraprogramm die Hamitonschen Gleichungen dieses Systems. Folgende Zwischenschritte sind dafür mit dem Copmuter abzuarbeiten (Die Rechenschritte wie Ableitung etc. soll der Computer übernehmen.):

13.1 Implementiere karthesische Koordinaten und das Vektorpotenzial $\vec{A}$.

13.2 Berechne die Lagrange-Funktion L aus ihrer Definition: $L = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\vec{r} \cdot \vec{A}$.

13.3 Berechne aus der Lagrange-Funktion den kanonischen Imupls $\vec{p}$.

13.4 Bestimme die Hamilton-Funktion. Dabei muss man zunächst aus den kanonischen Impulsen $\vec{p}$ Ausdrücke für die Ableitungen Koordinaten ermitteln und diese in die Hamilton-Funktion einsetzen.

13.5 Berechne aus der Hamilton-Funktion die Hamiltonschen Gleichungen.