Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. A. Knorr
Dipl-Phys. Philipp Hövel, Dipl-Phys. Philipp Zedler
Martin Kliesch

30. Mai 2006

wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/TPI

5. Übungsblatt zur Theoretischen Physik I

Abgabe: Dienstag 6. Juni 2006 (wegen Pfingsten) bis 12:00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 14 (5 Punkte): *Kanonische Transformation mit Erzeugender* R_2
Wiederhole den Begriff Kanonische Transformation aus der Vorlesung: Eine Koordinatentransformation heißt kanonisch, wenn unter ihr die Hamiltongleichungen ihre Form behalten. Eine kanonische Transformation $L \to L'$ kann durch eine Erzeugende R beschrieben werden, wobei $L(q_i, p_i, t) = L'(Q_i, P_i, t) + \dot{R}$. Man unterscheidet die Erzeugenden $R_1(q_i, Q_i, t)$, $R_2(q_i, P_i, t)$, $R_3(p_i, Q_i, t)$ und $R_4(p_i, P_i, t)$. Die Erzeugenden lassen sich über Legendre-Transformationen ineinander umrechnen. In der Vorlesung wurde die Konstruktionsvorschrift für R_1 durch Hinschreiben des Differentials explizit berechnet. Sie lautet

$$H' = H + \frac{\partial R_1}{\partial t} \qquad p_k = \frac{\partial R_1}{\partial q_k} \qquad P_k = -\frac{\partial R_1}{\partial Q_k}$$

Führe jetzt die explizite Berechnung der Konstruktionsvorschrift für R_2 durch. Drücke dafür R_2 als Legendre-Transformierte von R_1 aus.

Aufgabe 15 (10 Punkte): *Kepler-Problem im Hamilton-Jacobi-Formalismus*
Behandle das Kepler-Problem mit Hilfe der Hamilton-Jacobi-Gleichung. Dabei müssen folgende Schritte erledigt werden:

- Verwende das Gravitationspotential $V(r) = -\frac{m_1 m_2 G}{r}$.
- Formuliere die Lagrange-Funktion in Kugelkoordinaten.
- Berechne die generalisierten Impulse und gehe per Legendre-Transformation zur Hamilton-Funktion über.
- Warum lässt sich die Wirkung schreiben als $S(\vec{r}, \vec{p}, t) = W(\vec{r}, \vec{p}) + V(t)$
- Formuliere die Hamilton-Jacobi-Gleichung.
- Warum zerfällt die Hamilton-Jacobi-Gleichung in zwei unabhängige Differentialgleichungen? Nenne die dabei auftretende Konstante α_1.
- Mache den Separationsansatz $W = W_r(r) + W_\vartheta(\vartheta) + W_\varphi(\varphi)$.
- Welche Variable ist zyklisch? Warum können wir deshalb eine neue Konstante einführen? Nenne diese Konstante α_φ.
- Warum zerfällt die verbleibende Differentialgleichung wieder in zwei unabhängige Differentialgleichungen? Nenne die dabei auftauchende neue Konstante α_ϑ^2. Zeige, dass diese Konstante das Quadrat des Gesamtdrehimpulses ist!
- Berechne die transformierten Koordinaten als Ableitungen der Wirkungsfunktion.
- Führe die Rücktransformation in die ursprünglichen Koordinaten durch.
- Als Ergebnis erhälst du die Ortskoordinaten als Integralausdruck. Das Integral muss nicht ausgewertet werden.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 16 (5 Punkte): *Bohr-Sommerfeld-Quantisierung*
Als Vorbereitung für diese Aufgabe informiere dich über Winkel- und Wirkungsvariablen. Diese werden in den meisten Mechanik-Büchern behandelt. Die Wirkungsvariablen sind definiert als Integrale über die Ableitungen der Wirkungsfunktion. Das Potential für das Wasserstoffatom hat wie das des Keplerproblems die Form $V(r) = -\frac{k}{r}$, aber jetzt ist $k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$.

(16.1) Zeige, dass zum Berechnen der Wirkungsvariablen folgende Integrale zu lösen sind.

$$\begin{aligned} J_\varphi &= \oint p_\varphi d\varphi = \oint \frac{dW_\varphi}{d\varphi} d\varphi = a_\varphi \oint d\varphi \\ J_\vartheta &= \oint p_\vartheta d\vartheta = \oint \frac{dW_\vartheta}{d\vartheta} d\vartheta = \oint \sqrt{\alpha_\vartheta^2 - \frac{\alpha_\varphi^2}{\sin^2\vartheta}} d\vartheta \\ J_r &= \oint p_r dr = \oint \frac{dW_r}{dr} dr = \oint \sqrt{2m\left(E + \frac{k}{r}\right) - \frac{\alpha_\vartheta^2}{r^2}} dr \end{aligned}$$

Die Integrale sind nicht alle einfach und müssen nachgeschlagen werden (das ist nicht Teil dieser Aufgabe). Die Ergebnisse sieht folgendermaßen aus:

$$J_\varphi = 2\pi\alpha_\varphi \tag{1}$$
$$J_\vartheta = 2\pi(\alpha_\vartheta - \alpha_\varphi) \tag{2}$$
$$J_r = -2\pi\alpha_\vartheta + \pi k\sqrt{\frac{2m}{-E}} \tag{3}$$

Das 1913 von Niels Bohr entwickelte Atommodell konnte die Feinstrukturaufspaltung nicht erklären. Deshalb entwickelte Arnold Sommerfeld 1915/1916 ein verbessertes Atommodell, in dem nicht mehr die Radien, sondern die die Wirkungsvariablen J_i der Elektronen quantisiert sind, durch die Bedingung

$$J_k = \oint p_k dq_k = nh.$$

(16.2) Berechne daraus die Energieniveaus! Drücke hierfür zuerst mit Hilfe der Gleichungen 1 bis 3 die Energie als Funktion der Wirkungsvariablen J_r, J_ϑ und J_φ aus. Wie lautet der Quantisierungsbedingung zufolge das niedrigste Energieniveau? Wie lautet die allgemeine Formel für Energieniveaus im Wasserstoffatom?