

6. Übungsblatt zur Theoretischen Physik I

Abgabe: Montag 12. Juni 2006 bis 12:00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 17 (4 Punkte): *Bilanzen im Vielteilchensystem*

Rechne die Impuls- und Drehimpulsbilanz eines Vielteilchensystems aus der Vorlesung nach. Unterscheide zwischen externen Kräften $\vec{F}_e(\vec{r}_i, t)$ und internen Kräften $\vec{F}_{ij}(\vec{r}_i, \vec{r}_j)$ ($i, j = 1, \dots, N$).

Als Orientierung kann dabei die Rechnung der Energiebilanz aus der Vorlesung dienen: Die Energie des Systems ist gegeben durch $E(t) = U(t) + V_e(\{\vec{r}_i\}, t)$. Dabei bezeichnet $U(t)$ die innere Energie, die sich aus einem kinetischen und einem potentiellen Anteil zusammensetzt: $U(t) = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{ij} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$. Damit ergibt sich die Energiebilanz: $\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial V_e}{\partial t}$.

17.1 Der Impuls des Systems ist definiert als $\vec{P}(t) = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$. Zeige:

$$\frac{d\vec{P}(t)}{dt} = \vec{F}_e(\vec{r}, t) = \sum_i \vec{F}_e(\vec{r}_i(t), t).$$

17.2 Der Drehimpuls des Systems ist definiert als $\vec{L}(t) = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$. Zeige:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}(t) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_e(\vec{r}_i, t).$$

Nimm an, dass die inneren Kräfte $\vec{F}_{ij}$ entlang der Geraden wirken, die jeweils das i -te und das j -te Teilchen verbinden.

Aufgabe 18 (4 Punkte): *Lineares 3-atomiges Molekül*

In der Vorlesung wurde das lineare 3-atomige Molekül besprochen. Die Lagrange-Funktion dieses Systems lautet:

$$L = \frac{m_a}{2} \dot{\delta q}_1^2 + \frac{m_b}{2} \dot{\delta q}_2^2 + \frac{m_a}{2} \dot{\delta q}_3^2 - \frac{k}{2} (\delta q_1 - \delta q_2)^2 - \frac{k}{2} (\delta q_2 - \delta q_3)^2.$$

Führe die explizite Rechnung für die Herleitung der Lagrange-Funktion in reduzierten Koordinaten $Q_+(t) = \delta q_1 + \delta q_3$ und $Q_-(t) = \delta q_1 - \delta q_3$ aus und bestimme die Bewegungsgleichungen für $Q_+(t)$ und $Q_-(t)$ und berechne durch einen geeigneten Ansatz die Frequenzen der longitudinalen Normalmoden.

Aufgabe 19 (12 Punkte): *gekoppelte Schwinger mit dem Computer*

Betrachte das System zweier gekoppelter Schwinger (aus der Vorlesung bekannt). Mit dieser Aufgabe soll zunächst die Herleitung der Bewegungsgleichung mit dem Computer (s. A12 und A13) wiederholt werden. Gehe dazu folgendermaßen vor:

19.1 Implementiere die Koordinaten der beiden Schwinger und berechne die Lagrange-Funktion L aus ihrer Definition: $L = T - V$. Berücksichtige dabei alle Federkonstanten und die beiden Massen, so dass sie als Parameter unabhängig von einander variiert werden können. (In der Vorlesung wurde vom Spezialfall gleicher Massen und gleich äußerer Federn ausgegangen.)

19.2 Bestimme die Euler-Lagrange-Gleichungen.

19.3 Berechne aus der Lagrange-Funktion die kanonischen Impulse.

19.4 Bestimme die Hamilton-Funktion. Dabei muss man zunächst aus den kanonischen Impulsen Ausdrücke für die Ableitungen Koordinaten ermitteln und diese in die Hamilton-Funktion einsetzen.

19.5 Berechne aus der Hamilton-Funktion die Hamiltonschen Gleichungen. Zur Kontrolle dient folgende Frage: Ergeben die Hamiltonschen Gleichungen die gleichen Bewegungsgleichungen wie in (19.2)?

Bitte Rückseite beachten! →

Zusätzlich sollen die hergeleiteten Bewegungsgleichungen mit dem Computer gelöst werden. Stelle dafür $x_1(t)$, $x_2(t)$, die mittlere Auslenkung $x_1(t) + x_2(t)$ und die Trajektorie im Phasenraum (x_1, x_2) für folgende Parameter und Anfangsbedingungen graphisch dar. Beschreibe in Worten kurz die Bewegung.

- 19.6 gleiche Massen, gleiche Federkonstanten und als Anfangsbedingungen beide Massen a) gegenläufig maximal und b) gleichgerichtet ausgelenkt.
- 19.7 gleiche Massen, mittlere Federkonstante kleiner als die der äußeren Federn und als Anfangsbedingungen eine Masse maximal ausgelenkt und die andere in der Ruhelage.
- 19.8 wie in (19.7) nur die Federkonstanten der äußeren Federn um 20% voneinander unterschiedlich.
- 19.9 wie in (19.7) nur die Massen der Schwinger unterschiedlich.
- 19.10 gleiche Massen, gleiche Federkonstanten, aber eine äußere Feder fehlt und als Anfangsbedingungen eine Masse maximal ausgelenkt und die andere in der Ruhelage.

Denkt an ein paar erläuternde Worte zu den Fällen 19.6 - 19.10!