

8. Übungsblatt zur Theoretischen Physik I

Abgabe: Montag 26. Juni 2006 bis 12:00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 23 (11 Punkte): *Nichtlineare Wellengleichung: Korteweg-de Vries-Gleichung*

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einer nichtlinearen Wellengleichung:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 3u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = 0.$$

23.1 Zeige durch Einsetzen (entweder per Hand oder mit dem Computer), dass

$$u(x, t) = v \operatorname{Sech}^2 \left[\frac{\sqrt{v}}{2} (x - \varphi - vt) \right]$$

eine Lösung der oben genannten Korteweg-de Vries-Gleichung ist.

23.2 Stelle die Lösung graphisch dar. Welche Rolle spielen die Parameter v und φ ?

23.3 Implementiere die partielle Differentialgleichung im Computer und löse sie. Wähle dazu eine geeignete Anfangsbedingung und periodische Randbedingungen.

23.4 Wähle nun als Anfangsbedingung die Summe zweier Lösungen entsprechend der Form aus 23.1 mit unterschiedlichen Werten für v und φ , so dass die beiden Anteile während der simulierten Zeitspanne aufeinander treffen.

23.5 Beschreibe die Dynamik in Worten. Welches physikalische System wird durch dieses Modell beschrieben?

Aufgabe 24 (9 Punkte): *optische und akustische Zweige*

Aus der Vorlesung ist bekannt, wie der akustische Zweig der Dispersionsrelation aus der eindimensionalen geordneten Kette von Ionen hergeleitet werden kann. Betrachte nun das Modell von zwei unterschiedlichen Atomsorten (jeweils N Stück), die alternierend in einer Kette angeordnet sind.

24.1 Stelle die Lagrange-Funktion auf und leite die Bewegungsgleichung für das n -te Teilchen jeder Sorte her.

24.2 Wähle als Lösungsansatz für die Auslenkung des jeweils n -ten Teilchens

$$x_{n,\alpha} = \frac{c_\alpha}{\sqrt{m_\alpha}} e^{i(qna - \omega(q)t)},$$

wobei $\alpha = 1, 2$ die Atomsorte, m_α die entsprechenden Massen und a den Abstand von Atomen gleicher Sorte bezeichnen. Leite durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung eine Bestimmungsgleichung für $\omega(q)$ her.

24.3 Löse die Bestimmungsgleichung für $\omega(q)$ und stelle die verschiedenen Zweige $\omega(q)$ graphisch dar. Worin besteht der Unterschied, ob man die Massen gleich oder unterschiedlich wählt?

24.4 Welche Lösungen entsprechen akustischen, welche optischen Zweigen? Betrachte hierzu explizit auch die Fälle $q = 0$ und $q = \pi/a$.

24.5 Welche Bewegung führen die Atome in den verschiedenen Zweigen aus?