Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. S. Hess,
Sebastian Heidenreich,
Stefan Butscher 19. Juni 2006

10. Übungsblatt zur Theoretischen Physik III

Abgabe (nur in zweier Gruppen): Freitag 30.6.06 bis 12:00 Uhr in den Briefkasten im Physik-Altbau.

Aufgabe 1 (11 Punkte): *Maxwell-Gleichungen im Vierer-Formalismus*
Betrachten Sie die folgende Lagrangedichte für das elektromagnetische Feld:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j^\mu A_\mu$$

mit dem Feldstärke-Tensor $F_{\mu\nu} = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$, dem Viererpotenzial A_μ und dem Viererstrom j_μ.

(a) Leiten Sie die inhomogenen Maxwell-Gleichungen der Form

$$\partial_\rho F^{\rho\lambda} = -\mu_0 j^\lambda$$

aus einem Wirkungsprinzip her.
Hinweis:
Die Variation des Wirkungsfunktionals $S[\mathfrak{L}] = \int dx^4 \mathfrak{L}(A_\mu, \partial A_\mu, x_\mu)$ führt auf die Euler-Lagrange Gleichungen:

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial A_\lambda} - \partial_\rho \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial_\rho A_\lambda} = 0$$

(b) Zeigen Sie, dass $\partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} = 0$.

Im äußeren Kalkül schreibt sich der Feldstärketensor als $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$.

(c) Zeigen sie, dass die äußere Ableitung dF verschwindet.

Für die Wahl der Minkowskimetrik $\eta_{\mu\nu} = diag(+1, +1, +1, -1)$ (Signatur $+2$) lässt sich F schreiben als

$$F = \frac{1}{c} E^1 dx^1 \wedge dx^4 + \frac{1}{c} E^2 dx^2 \wedge dx^4 + \frac{1}{c} E^3 dx^3 \wedge dx^4 + B^1 dx^2 \wedge dx^3 + B^2 dx^3 \wedge dx^1 + B^3 dx^1 \wedge dx^2.$$

(c) Leiten Sie die homogenen Maxwellgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus $dF = 0$ her.

Bonusaufgabe (+5 Punkte)
Die obige inhomogene Maxwellgleichung ist zu $d \star F = \mu_0 \star j$ äquivalent, wobei die $\star$ die Dualitätsoperation bezeichnet.

(d) Leiten Sie aus daraus die inhomogenen Maxwellgleichungen für $\vec{H}$ und $\vec{D}$ im Vakuum ab.

Aufgabe 2 (9 Punkte): *relativistische Transformation*
In einem von einem inertialen Beobachter mitgeführtem Koodinantensystem (Σ) befinde sich eine Punktladung im Ursprung in Ruhe.

(a) Geben Sie den elektromagnetischen Feldstärke-Tensor in Σ an.

(b) Ein zweiter Beobachter bewegt sich relativ zum ersten mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung. Welche E und B Felder werden vom zweiten Beobachter in seinem Ruhesystem Σ' gemessen? Transformieren Sie hierfür den Feldstärke-Tensor.

(c) Diskutieren Sie den Grenzfall $v \to \infty$.

- **Scheinkriterien:** 50 % der Punkte aus den Übungszetteln, aktive Teilnahme an den Tutorien, mindestens 1 × vorrechnen im Tutorium und 50 % der Punkte der Klausur
- **Sprechstunde:** S. Butscher Mi, 12^{00}-13^{00} PN 703, S. Heidenreich Do 11^{30}-12^{30} PN 702