

3. Übungsblatt zur Theoretische Physik IIIa: Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 09.05.06 in der Vorlesung

Aufgabe 5(4 Punkte): Schwarzsche Ungleichung

In der Vorlesung habt Ihr die Schwarzsche Ungleichung

$$||\psi_1|| \cdot ||\psi_2|| \geq |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|$$

kennengelernt. Beweist die Gültigkeit dieser Ungleichung.

Tipp: Betrachtet die Norm des Vektors $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + \lambda|\psi_2\rangle$ und wählt den Faktor λ geschickt.

Aufgabe 6(6 Punkte): Adjungierte Operatoren

Gegeben seien zwei lineare Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Beweist folgende Eigenschaften:

- (a) $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$
- (b) $\hat{A}^{++} = (\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$
- (c) $(\hat{A} + \hat{B})^+ = \hat{A}^+ + \hat{B}^+$
- (d) $(\lambda\hat{A})^+ = \lambda^*\hat{A}^+$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 7(10 Punkte): Projektoren

Eine lineare Abbildung $\hat{P}$ eines Hilbertraums $\mathcal{H}$ in sich selbst heißt (orthogonaler) **Projektor**, wenn sie **idempotent** und **selbstadjungiert** ist, d.h., wenn gilt:

$$\hat{P}^2 = \hat{P} \quad \text{und} \quad \hat{P}^+ = \hat{P}.$$

1. Zeigt: $\hat{Q} = \hat{1} - \hat{P}$ ist ein Projektor, wenn $\hat{P}$ ein Projektor ist und es gilt $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0$.
2. Berechne die Eigenwerte eines Projektors.
3. Seien $\hat{P}, \hat{Q}$ Projektoren, für die gilt: $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = \hat{Q}$. Zeigt, dass $\hat{P} - \hat{Q}$ ein Projektor ist.
4. Sei $\phi \in \mathcal{H}$ ein normierter Vektor und $\hat{P} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}; \eta \mapsto |\phi\rangle\langle\phi|\eta\rangle$. Zeigt, dass diese Abbildung ein Projektor ist.
5. Seien $\psi, \phi \in \mathcal{H}$ orthonormale Vektoren. Zeigt, dass die Abbildung

$$\hat{Q} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}; \eta \mapsto |\phi\rangle\langle\psi + \phi|\eta\rangle$$

idempotent aber *kein* Projektor ist.

Bitte Rückseite beachten! →

Hinweise:

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in Dreiergruppen).
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige Teilnahme am Tutorium.

Es wird voraussichtlich insgesamt 11 reguläre Übungsblätter geben.

Übungsblätter werden Dienstag in der Vorlesung ausgegeben und eine Woche später am Ende der Vorlesung eingesammelt.

Zur Erinnerung: die **Vorlesung** findet

- Dienstags 9-10 Uhr, PN 229
- Mittwochs 10-12 Uhr, PN 229

statt.

Literaturtipps zur Lehrveranstaltung (nur eine Auswahl):

- A. Messiah, Quantenmechanik I und II, de Gruyter
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsges.
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik Band 5 Quantenmechanik, Teil I+II, Springer
- C. Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik I+II, de Gruyter

Kontakt: www.itp.physik.tu-berlin.de/lehre/TPIIIa