12. Mai 2006

Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Priv.-Doz. Dr. S. Klapp
Dipl.-Phys. Jan Schlesner

wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/TPIIIa

4. Übungsblatt zur Theoretische Physik IIIa: Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 16.05.06 in der Vorlesung

Aufgabe 8(4 Punkte): *Einfache Kommutatoren*
Berechnet folgende Kommutatoren:

(a) $[\hat{p}_{x_i}, \hat{x}_j]$

(b) $[\hat{p}_{x_i}, \hat{p}_{x_j}]$

(c) $[\hat{x}_i, \hat{x}_j]$

Aufgabe 9(10 Punkte): *Virialsatz*

(a) Man zeige, dass für Hamilton–Operatoren der Form $\hat{H} = \hat{H}(\underline{\hat{x}}, \underline{\hat{p}}) = \sum_{k,m,n} C_{mn} \hat{p}_k^m \hat{x}_k^n$ mit festen Koeffizienten C_{mn} ($k \in 1,2,3$ und $n, m \in 1, 2, \cdots, \infty$) die folgenden Vertauschungsrelationen gelten:

$$[\hat{H}, \hat{p}_k] = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \hat{H}}{\partial x_k}, \text{ und } [\hat{H}, \hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial \hat{H}}{\partial p_k}.$$

(b) Berechnet den Kommutator $[\underline{\hat{x}} \cdot \underline{\hat{p}}, \hat{H}]$ für alle Hamilton–Operatoren $\hat{H}$ der Form $\hat{H} = \hat{T}(\underline{\hat{p}}) + \hat{V}(\underline{\hat{x}})$ mit $\hat{T} = \frac{\underline{\hat{p}}^2}{2m}$.

(c) (*Bonusaufgabe: 4 Punkte*) Unter welchen besonderen Voraussetzungen gilt der Virialsatz für die Erwartungswerte: $2\langle\hat{T}\rangle = \langle\underline{\hat{x}} \cdot \nabla\hat{V}\rangle$? Für welche Form des Potenzials $\hat{V}$ gilt unter Verwendung des Virialsatzes $\langle\hat{T}\rangle = \langle\hat{V}\rangle$?

Aufgabe 10(6 Punkte): *Rechnen mit Operatoren*
Es seien $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zwei Operatoren im Hilbert–Raum $\mathcal{H}$. Zeigt folgende Behauptungen unter der Bedingung, dass $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$ gilt:

(a) $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$

(b) $e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}} e^{\hat{A}} e^{[\hat{A},\hat{B}]}$

Hinweis: Es gilt $e^{\hat{A}}\hat{B} = \left(\hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}]\right) e^{\hat{A}}$. Ein möglicher Lösungsweg für Punkt (a) basiert darauf, dass man die Funktionen $f(t) = e^{t(\hat{A}+\hat{B})}$ und $g(t) = e^{t\hat{A}} e^{t\hat{B}} e^{-t^2[\hat{A},\hat{B}]/2}$ betrachtet und zeigt, dass diese Funktionen der gleichen linearen DGL 1. Ordnung zu gleichen Anfangswerten gehorchen. Analog für Punkt (b) kann man die Funktionen $f(t) = e^{t\hat{A}} e^{\hat{B}}$ und $g(t) = e^{\hat{B}} e^{t\hat{A}} e^{[t\hat{A},\hat{B}]}$ betrachten.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

Hinweise:

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in Dreiergruppen).
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige Teilnahme am Tutorium.

Es wird voraussichtlich insgesamt 11 reguläre Übungsblätter geben.
Übungsblätter werden Dienstag in der Vorlesung ausgegeben und eine Woche später am Ende der Vorlesung eingesammelt.
Zur Erinnerung: die **Vorlesung** findet

- Dienstags 9-10 Uhr, PN 229
- Mittwochs 10-12 Uhr, PN 229

statt.

Literaturtipps zur Lehrveranstaltung (nur eine Auswahl):

- A. Messiah, Quantenmechanik I und II, de Gruyter
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsges.
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik Band 5 Quantenmechanik, Teil I+II, Springer
- C. Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik I+II, de Gruyter

Kontakt: wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/TPIIIa