Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Priv.-Doz. Dr. S. Klapp
Dipl.-Phys. Jan Schlesner

6. Übungsblatt zur Theoretische Physik IIIa: Quantenmechanik

Abgabe: Dienstag 30.05.06 in der Vorlesung

Aufgabe 13(10 Punkte): *Harmonischer Oszillator*

Der isotrope N-dimensionale harmonische Oszillator ist durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m}\hat{p}_i^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}_i^2$$

charakterisiert.

(a) Begründet die Bezeichnungen von $\hat{b}$ und $\hat{b}^+$ als Erzeugungs- und Vernichtungsoperator. Berechnet hierzu $\hat{N}\hat{b}^+|n\rangle$ und deutet das Ergebnis.

(b) Zeigtfür den 1d-Fall mittels vollständiger Induktion die Normierung in $|n> = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\hat{b}^+)^n|0>$ und die folgenden Gleichungen:

$$\langle n+1|\hat{b}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}, \quad \langle n-1|\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{nm}.$$

(c) Bestimmtfür den 1d-Fall die Unschärfen $\Delta\hat{x}_i|_n = +\left(< n|\hat{x}_i^2|n > - (< n|\hat{x}_i|n >)^2\right)^{1/2}$ sowie $\Delta\hat{p}_i|_n$ im Formalismus der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und diskutiert $\Delta\hat{x}_i\Delta\hat{p}_i|_n$.

(d) In zwei Dimensionen soll die Definition $\hat{L}_3 := \hat{x}_1\hat{p}_2 - \hat{x}_2\hat{p}_1$ gelten. Zeigt, dass $\hat{L}_3 = i\hbar(\hat{b}_1\hat{b}_2^+ - \hat{b}_1^+\hat{b}_2)$ gilt. Was folgt daraus für $[\hat{H}, \hat{L}_3]$?

Aufgabe 14(6 Punkte): *Harmonischer Oszillator*

Der Hamilton–Operator des eindimensionalen harmonischen Osizllators lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}.$$

1. Berechnet die Zeitabhängigkeit des Ort- und Impulsoperators im Heisenberg–Bild.
2. Gebet den Erwartungswert dieser beiden Operatoren zum Zeitpunkt t_1 an, wenn zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ $\langle\hat{x}\rangle_{t=t_0} = x_0$ und $\langle\hat{p}_x\rangle_{t=t_0} = p_0$ gilt.
3. Berechnet den Kommutator $[\hat{x}_H(t_1), \hat{x}_H(t_2)]$ zweier Ortsoperatoren im Heisenbergbild zu verschiedenen Zeiten t_1, t_2.

Aufgabe 15(4 Punkte): *Ehrenfest-Theorem*

Zeigt, dass für einen Hamilton-Operator der Form $\hat{\mathrm{H}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{x}})$ folgende Gleichungen für die Erwartungswerte des Ortsoperators $\hat{\mathbf{x}}$, Impulsoperators $\hat{\mathbf{p}}$, Drehimpulsoperators $\hat{\mathbf{L}}$ sowie des Operators $\hat{\mathbf{F}} := -\vec{\nabla}V$ (Kraft):

1. $\frac{d}{dt}\langle\hat{\mathbf{x}}\rangle = \frac{1}{m}\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle$
2. $\frac{d}{dt}\langle\hat{\mathbf{p}}\rangle = \langle\hat{\mathbf{F}}\rangle$

Hinweis: Beachtet, dass Erwartungswerte bildunabhängig sind und benutzt die Bewegungsgleichung der Operatoren im Heisenbergbild (es geht allerdings auch im Schrödingerbild!).

Hinweise:

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in Dreiergruppen).
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige Teilnahme am Tutorium.

Es wird voraussichtlich insgesamt 11 reguläre Übungsblätter geben.
Übungsblätter werden Dienstag in der Vorlesung ausgegeben und eine Woche später am Ende der Vorlesung eingesammelt.
Zur Erinnerung: die **Vorlesung** findet

- Dienstags 9-10 Uhr, PN 229
- Mittwochs 10-12 Uhr, PN 229

statt.

Literaturtipps zur Lehrveranstaltung (nur eine Auswahl):

- A. Messiah, Quantenmechanik I und II, de Gruyter
- E. Fick, Einführung in die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsges.
- W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik Band 5 Quantenmechanik, Teil I+II, Springer
- C. Cohen-Tannoudji, Quantenmechanik I+II, de Gruyter

Kontakt: wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/TPIIIa