6. Juni 2006

Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. Wolfgang Muschik
Dipl.-Phys. Grigory Bordyugov

wwwitp.physik.tu-berlin.de/lehre/TPIa

5. Übungsblatt zur Theoretischen Physik Ia (Mechanik)

Abgabe: Do. 15. Jun 2006 in der Übung

Aufgabe 8 (3 Punkte): *Eichinvarianz der Lagrange-Funktion*
Beweisen Sie die folgende Behauptung: Sei $P(q_i, t), i = 1, \ldots, f$ eine C^3-Funktion (3mal stetig differenzierbar) und sei

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{k=1}^{f} \frac{\partial P}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial P}{\partial t}.$$

Dann ist $q_i(t)$ genau dann Lösung von

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, f$$

wenn es Lösung von

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, f$$

ist.

Aufgabe 9 (3 Punkte): *Forminvarianz der Lagrange-Gleichung*
Beweisen Sie die folgende Behauptung: Sei

$$\begin{aligned} q_i &= f_i(Q_1, \ldots, Q_N), \\ Q_i &= F_i(q_1, \ldots, q_N) \end{aligned}$$

eine umkehrbar-eindeutige (mindestens C^2) Transformation der generalisierten Koordinaten. Dann ist $Q_i(t)$ eine Lösung der LAGRANGE-Gleichung zur transformierten LAGRANGE-Funktion

$$\begin{aligned} L'(Q_1, \ldots, Q_N, \dot{Q}_1, \ldots, \dot{Q}_N) = L\Bigg(& f_1(Q_1, \ldots, Q_N), \ldots, f_N(Q_1, \ldots, Q_N), \\ & \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_1}{\partial Q_k} \dot{Q}_k, \ldots, \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_N}{\partial Q_k} \dot{Q}_k \Bigg), \end{aligned}$$

wenn $q_i(t)$ Lösung der LAGRANGE-Gleichung zu $L(q_1, \ldots, q_N, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_N)$ ist.
Interpretieren Sie den Satz physikalisch!

Aufgabe 10 (4 Punkte): *Sphärisches Pendel*
Betrachten Sie das dreidimensionale sphärische Pendel vom 1. Übungsblatt. Stellen Sie die Zwangsbedingungen auf und führen Sie generalisierte Koordinaten ein. Geben Sie die LAGRANGE-Funktion an und stellen Sie die LAGRANGE-Bewegungsgleichung 2. Art auf.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die kintetische Energie in sphärischen Koordinaten folgende Gestalt annimmt:

$$T(r, \dot{r}, \varphi, \dot{\varphi}, \vartheta, \dot{\vartheta}) = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2 r^2 \right) .$$

Bitte vergessen Sie nicht, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf das Lösungsblatt zu schreiben!!!