

8. Übungsblatt zur Theoretischen Physik Ia (Mechanik)

Abgabe: Do. 6. Jul 2006 in der Vorlesung

Aufgabe 15 (10 Punkte): Wellengleichung - mechanischer Zugang

N identische Massenpunkte sind untereinander und mit Wänden durch $N + 1$ identische Federn verbunden (ganz analog zur Aufgabe 11). Die Gesamtlänge der Kette beträgt L und die Gesamtmasse beträgt M . Die Federn sind aus einem elastischen Stoff angefertigt, wobei eine Feder der Länge eines Meters aus diesem Stoff eine Federkonstante k_0 hat.

- 15.1 Berechnen Sie die Einzelmassen m_i und zeigen Sie, dass die Federkonstante der einzelnen Federn

$$k_i = \frac{k_0 N}{L}$$

beträgt.

- 15.2 Stellen Sie die LAGRANGESchen Bewegungsgleichungen für die Massen auf. *Hinweis 1:* Sie bekommen nur drei Gleichungen: 1) für den ersten Massenpunkt, 2) für den N -ten Massenpunkt 3) die Gleichungen für den $2, \dots, N - 1$ -ten Massenpunkt sehen alle ganz analog aus. *Hinweis 2:* Reservieren Sie u_i für die Verschiebungen der Massen aus ihren Ruhelagen.

- 15.3 Mit Hilfe der finiten Differenzen für die zweite Ableitung einer Funktion $f(x)$

$$f''(x) = \frac{f(x - \Delta x) + f(x + \Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2}$$

zeigen Sie, dass im kontinuierlichen Limes für $N \rightarrow \infty$ die Bewegungsgleichung sich folgenderweise schreiben lässt:

$$\rho \partial_{tt} u - k_0 \partial_{xx} u = 0,$$

wobei $u(x, t)$ die zeit- und ortsabhängigen Verschiebung ist und $\rho = M/L$ die Massendichte ist. Formulieren Sie die Grenzbedingungen für die Funktion $u(x, t)$ für $x = 0$ und $x = L$.

- 15.4 Betrachten Sie nun ein unendlich ausgedehntes Medium (keine Grenzbedingungen). Mit dem Ansatz

$$u(x, t) = u_0 e^{i\omega t} e^{ikx}$$

leiten Sie die sogenannte *Dispersionsrelation* $\omega = \omega(k)$ her.

- 15.5 Diskutieren Sie den Zusammenhang mit der elektrodynamischen Wellengleichung und berechnen Sie die Phasengeschwindigkeit $c_p = \omega/k$ und die Gruppengeschwindigkeit $c_g = \frac{d\omega}{dk}$.

- 15.6 *James Bond Aufgabe, +3 Bonus-Punkte*, Berechnen Sie die Eigenfrequenzen der Schwingungen für den *diskreten Fall* für grosses N . Vergleichen Sie diese mit der Frequenz ω für den kontinuierlichen Fall.

Bitte vergessen Sie nicht, Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf das
 Lösungsblatt zu schreiben!!!