Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. A. Knorr
Christopher Witte
Juliane Strassner

10. Januar 2002

10. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

Abgabe: Donnerstag 17.01.01 in der Vorlesung

Aufgabe 19 (10 Punkte): *Gauß'sches Wellenpaket*

Durch die Superposition ebener Wellen mit verschiedenen Wellenzahlen k und Amplitude $\hat{\psi}(k)$, die alle die Schrödingergleichung erfüllen, kann man zu einem festgelegten Zeitpunkt jede beliebige Funktion im Ortsraum per Fouriertrafo generieren. Besonders einfach sind solche Wellenfunktionen, die die Form einer Gauß-Glocke haben. Diese bleiben dann auch im Laufe der Zeit von dieser Form, wenn das Potential Null ist, nur dass sich der Ort des Maximums und die Breite verändern. Solche Wellenpakete können in der Quantenmechanik benutzt werden, um in einem bestimmten Bereich lokalisierte Teilchen zu beschreiben.

Das eindimensionale Wellenpaket

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

habe zur Zeit $t = 0$ die From einer Gauß-Glocke

$$\psi(x,0) = Ae^{-\frac{x^2}{2b^2}} e^{ik_0 x}.$$

1. Welche *Dispersionsrelation* muss für $\omega(k)$ gelten, damit die freie SCHRÖDINGER-Gleichung (d.h. $V = 0$) erfüllt ist?
2. Bestimme die positive Normierungskonstante A.
3. Zeige mit Hilfe der Fourier-Transformation, dass die Gewichtsfunktion $\hat{\psi}(k)$ ebenfalls die Form einer Gauß-Glocke hat.
   Tipp: Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax+d)^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{a}$ für alle $a > 0$ und $d \in \mathbb{C}$.
4. Als *Breite* einer Gauß-Glocke ist der Abstand der beiden Punkte rechts und links vom Maximum definiert, an denen der Funktionswert auf den $1/e$-ten Teil des Maximums abgefallen ist. Bestimme die *Breite* Δx, bzw. Δk der Funktionen $|\psi(x,0)|^2$ und $|\hat{\psi}(k)|^2$.
5. Bestimme das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p$, wobei man für den Impuls die De-Broglie-Beziehung $p = \hbar k$ benutze.

Literatur zur QM:

- W. Nolting: *Grundkurs Theo. Physik 5: Quantenmechanik Teil 1: Grundlagen* (Vieweg 1997)
  Anschaulich. Viele Rechenbeispiele. Kontrollfragen an jedem Kapitelende. Mathematik wird erklärt.
- F. Schwabl: *Quantenmechanik* (Springer 1988)
  Übersichtlich. Mathematisch eher knapp. Wesentlich weitergehend als Nolting.
- T. Fließbach: *Quantenmechanik* (Spektrum 1997)

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 20 (10 Punkte): *Wiederholung: Elektrodynamik*
Wir wollen die Grundideen und Zusammenhänge der Elektrodynamik durch einige Fragen wiederholen. Bitte beantwortet die Fragen entweder mathematisch oder durch eine kurze Erklärung. Für die volle Punktzahl sollten mindestens $2/3$ der Fragen bearbeitet werden. Wir werden dann im Tutorium die Fragen besprechen und bepunkten.

1. Erkläre die Formel für die elektrostatische Feldstärke einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ anhand der Feldstärke einer Punktladung und des Superpositionsgesetzes.
2. Welche partielle Differentialgleichung beschreibt das elektrostatische Potential bei gegebener Ladungsverteilung?
3. Wie berechnet man Volumen- und Oberflächenelemente in krummlinigen Koordinaten?
4. Welche mathematischen Sätze der Vektoranalysis (integrale und differentielle) spielen in der Elektrodynamik eine große Rolle und wo?
5. Was ist charakteristisch für den Verlauf statischer elektrischer Feldlinien an der Oberfläche eines Leiters? Erkläre das Phänomen und erläutere, was daraus für das elektrische Potential auf der Oberfläche folgt.
6. Was versteht man unter dem Vektorpotential eines gegebenen Feldes? Was muss für das gegebene Feld gelten, damit ein solches Vektorpotential existiert?
7. Was versteht man unter Coulomb-Eichung und wieso kann man diese Eichung für das Vektorpotential immer wählen?
8. Welche mathematischen Objekte benutzt man, um diskrete Ladungsverteilungen (Punktladungen) mit den Formeln für kontinuierliche Ladungsdichten zu beschreiben? Erkläre kurz, warum es sich bei diesen Objekten nicht um echte Funktionen handelt. Wie kann man z.B. die Divergenz des Feldes einer Punktladung mathematisch beschreiben?
9. Was versteht man unter der Green'schen Funktion der Elektrostatik und was gilt für diese?
10. Schreibe die Deiner Meinung nach wichtigsten Gleichungen und Formeln der Elektrodynamik auf (5-8 Stück), benenne sie und erläutere sie in einem (Halb-)Satz.
11. Was ist die Energiebilanz des elektromagnetischen Feldes? Erläutere die einzelnen Terme kurz in Worten.
12. Wie sind die Potentiale im dynamischen Fall definiert und warum macht das Sinn?
13. Was versteht man unter Lorenz-Eichung. Welche Differentialgleichungen folgen aus den Maxwellgleichungen für die Potentiale in dieser Eichung?
14. Was sind die retardierten Potentiale?
15. Wir haben den Dynamo und den Generator als Beispiele des Induktionsgesetzes behandelt. In beiden beschrieben Fällen wurde in dieser Aufgabe die gleiche Spannung erzeugt. Manchmal hört man für dieses Phänomen die Erklärung:„Das ist so, weil man von dem einen Versuchsaufbau zum anderen durch eine Lorentz-Transformation wechseln kann und die Elektrodynamik invariant unter diesen Transformationen ist.“
    Erläutere, warum diese Erklärung falsch ist. Kannst du ein anderes Beispiel konstruieren, wo diese Erklärung passend wäre?