Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. A. Knorr
Dipl.-Phys. Christopher Witte
Dipl.-Phys. Juliane Strassner 23. Oktober 2001

2. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

Abgabe: Donnerstag 8.11.01 in der Vorlesung

Aufgabe 3 (12 Punkte): *Gauß'sches Gesetz*

Das Gauß'sche Gesetz der Elektrostatik $\nabla\vec{\mathbf{E}} = \rho/\epsilon_0$ legt die Ladungen als die Quellen des elektrischen Feldes fest. Führt man ein elektrisches Potential ein, so gilt $\vec{\mathbf{E}} = -\nabla\phi$. In dieser Aufgabe soll der Umgang mit dem Gauß'schen Gesetz und der damit verbundenen Mathematik (Gradient, Divergenz, Gauß'scher Satz...) in krummlinigen Koordinaten geübt werden.

Das Potential einer Ladungsverteilung sei gegeben als

$$\phi(x,y,z) = c\frac{z^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)/d}}{x^2+y^2+z^2},$$

wobei c und d Konstanten seien.

1. Welche physikalischen Einheiten haben die Konstanten c und d?
2. Schreibe das Potential in Kugelkoordinaten.
3. Berechne das elektrische Feld $\vec{\mathbf{E}}$ in Kugelkoordinaten. Benutze
$$\nabla f = (\frac{\partial}{\partial r}f)\vec{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}(\frac{\partial}{\partial\theta}f)\vec{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}(\frac{\partial}{\partial\phi}f)\vec{\mathbf{e}}_\phi.$$
4. Berechne die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$, die ein solches Feld erzeugt. Benutze
$$\nabla\cdot\vec{u} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 u_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta \sin\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\phi}{\partial\phi}.$$
5. Welche Ladung ist in einer Kugel vom Durchmesser $R = 1m$ um den Koordinatenursprung enthalten?

Die in Punkt 3 und 4 angegebenen Ausdrücke der Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten werden später in der VL begründet.

Aufgabe 4 (8 Punkte): *Identitäten*
Die folgenden Identitäten aus der Vektor-Analysis sind in der Elektrodynamik fundamental. In der VL werden sie häufig benutzt und sollen hier nachgerechnet werden.

Zeige die Gültigkeit folgender Identitäten

1. Sei f eine Funktion. Dann gilt
$$\nabla\times(\nabla f)[= \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, f] = 0.$$
2. Sei $\vec{v}$ ein Vektorfeld. Dann gilt
$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{v})[= \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}] = 0.$$
3. Sei $\vec{v}$ wiederum ein Vektorfeld. Dann gilt
$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v})[= \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}] = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \Delta\vec{v},$$
wobei $\Delta = \nabla\cdot\nabla[= \mathrm{div}\,\mathrm{grad}]$ der *Laplace*-Operator ist, der auf jede einzelne Komponente des Vektorfeldes wirkt.