Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. A. Knorr
Christopher Witte
Juliane Strassner

7. November 2001

4. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

Abgabe: Donnerstag 22.11.01 in der Vorlesung

Aufgabe 7 (10 Punkte): *Doppelschicht (p-n-Übergang)*

In dieser Aufgabe wird eine Grenzschicht zwischen zwei Raumladungszonen als Modell für einen p-n-Übergang betrachtet. Die Raumladungsdichte wird in diesem Fall zu beiden Seiten der Grenzschicht als unterschiedlich aber konstant angenommen.

Betrachtet werden zwei aneinandergrenzende dünne Kugelschalen aus unterschiedlichen Materialien (z. B. zwei verschieden dotierte Halbleiterschichten). Die Grenzfläche befinde sich bei dem Radius R. Auf den beiden Seiten der Grenzschicht befinden sich Raumladungsgebiete mit unterschiedlicher Ladung. Die Raumladungsdichte habe folgende Form:

$$\rho(z) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R - d_p \\ -eN_a & R - d_p < r < R \\ eN_d & R < r < R + d_n \\ 0 & R + d_n < r \end{cases},$$

wobei $d_p, d_n \ll R$ gelte. N_a und N_d sind die konstanten Dotierungskonzentrationen in den beiden Schichten, d_p und d_n die Ausdehnungen der Raumladungszonen. Die Gesamtladung der Doppelschicht sei Null.

1. Welcher Zusammenhang gilt zwischen d_p und d_n, wenn die Doppelschicht elektrisch neutral ist?

2. Berechne mit Hilfe der Poisson-Gleichung das Potential ϕ.

3. Begründe mit Hilfe des Gauß'schen Satzes, dass das elektrische Feld außerhalb der Doppelschicht verschwindet.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 8 (10 Punkte): *δ-Distribution*

Die δ-Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen f definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{1}$$

Etwas vereinfacht wird das δ selbst oft als Funktion bezeichnet, was aber im strengen Sinne nicht möglich ist (eine solche Funktion müsste überall außer in der 0 verschwinden und in der 0 „irgendwie" unendlich sein...). Tatsächlich kann man sie als **Grenzwert** *einer* **Funktionenschar** *g_ϵ angegeben. Um zu überprüfen, dass eine solche Schar eine Darstellung der δ-Distribution ist, reicht es dann zu zeigen, dass im Grenzwert „unter dem Integral" die Bedingung (1) erfüllt ist*[1]*.*
Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese sogenannte „(Dirac-) δ-Funktion" darzustellen. Eine davon soll in dieser Aufgabe näher betrachtet werden.

1. Zeige, dass durch folgende Funktionenschar im Grenzwert $\epsilon \to 0$ eine Darstellung für die „δ-Funktion" gegeben ist:

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

   Tipp: Benutze die Substitution $y = \frac{x}{\epsilon}$. Grenzwertbildung und Integration dürfen, wo dies sinnvoll ist, vertauscht werden.

2. Zeige, dass für Funktionen f, die differenzierbar und außerhalb eines beschränkten Intervalles Null sind,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{0}^{\infty} -f'(x) dx \tag{2}$$

   gilt, (a) durch direktes Überprüfen der definierenden Gleichung (1) und (b) durch partielle Integration mit Hilfe der Darstellung durch die Schar g_ϵ.
   Tipp: Benutze als Stammfunktion von $\epsilon/(x^2 + \epsilon^2)$ dafür $\arctan(x/\epsilon) + \pi/2$ und zeige, dass die Schar der Stammfunktionen von g_ϵ fast überall[2] gegen die sogenannte „Heavyside"-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

   konvergiert (aus diesem Grunde wird diese Funktion dann auch als Stammfunktion der δ-Distribution bezeichnet).

[1] Eine **nützliche Tatsache**, die aus der Theorie der Distributionen stammt, ist, dass man dies nur für alle sogenannten Test-Funktionen zu zeigen braucht, die beliebig oft differenzierbar sind und außerdem außerhalb eines beschränkten Intervalles Null sind. Insbesondere fallen solche Funktionen schnell genug gegen $\pm\infty$ ab, so dass alle vorkommenden Integrale existieren.

[2] „Fast überall" bedeutet, dass die Schar nur in einzelnen, isolierten Punkten - hier nämlich in der Null - nicht entsprechend konvergiert. Für den Wert eines Integrals sind aber einzelne Punkte auf der x-Achse irrelevant. Achtung: Diese Aussage gilt bei „echten" Funktionen (wie sie hier vorliegen: $H(x)$ und $f'(x)$) und wenn die Schar auch gegen eine Funktion konvergiert (die sich an einigen Punkten unterscheiden darf)!