Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. A. Knorr
Christopher Witte
Juliane Strassner

27. November 2001

5. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

Abgabe: Donnerstag 29.11.01 in der Vorlesung

Aufgabe 7 (10 Punkte): *δ-Distribution*

Die δ-Distribution ist durch ihre Wirkung auf Funktionen f definiert:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0). \tag{1}$$

Damit die Definition Sinn macht, muss die sogenannte Test-Funktion f bei $x = 0$ stetig sein. Etwas vereinfacht wird das δ selbst oft als Funktion bezeichnet, was aber im strengen Sinne nicht möglich ist (eine solche Funktion müsste überall außer in der 0 verschwinden und in der 0 „irgendwie“ unendlich sein...). Tatsächlich kann man sie als **Grenzwert** *einer* **Funktionenschar** *g_ϵ angegeben. Um zu überprüfen, dass eine solche Schar eine Darstellung der δ-Distribution ist, reicht es dann zu zeigen, dass im Grenzwert „unter dem Integral“ die Bedingung (1) erfüllt ist*[1].
Es gibt mehrere Möglichkeiten, diese sogenannte „(Dirac-) δ-Funktion“ darzustellen. Eine davon soll in dieser Aufgabe näher betrachtet werden.

1. Zeige, dass durch folgende Funktionenschar im Grenzwert $\epsilon \to 0$ eine Darstellung für die „δ-Funktion“ gegeben ist:

$$g_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

2. Zeige durch direktes Nachrechnen, dass im Sinne der Darstellung als Grenzwert der obigen Funktionenschar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

   gilt. *Tipp:* die Stammfunktion von $\epsilon/(x^2 + \epsilon^2)$ ist $\arctan(x/\epsilon) + C$.

3. Zeige, dass für Test-Funktionen, die differenzierbar und außerhalb eines beschränkten Intervalles Null sind,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = \int_{0}^{\infty} -f'(x) dx \tag{2}$$

   gilt, (a) durch direktes Überprüfen der Definition (1) und (b) durch partielle Integration mit Hilfe der Darstellung durch die Schar g_ϵ.

Bitte Rückseite beachten!$\longrightarrow$

[1] Eine **nützliche Tatsache** ist, dass man dies nur für alle Test-Funktionen zu zeigen braucht, die beliebig oft differenzierbar sind und außerdem außerhalb eines beschränkten Intervalles Null sind.

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Volumenintegrale, Ghostbusters etc.*

Volumenintegrale komplizierterer geometrischer Objekte als Kugeln oder Würfel kommen in der Anwendung sehr häufig vor. Der Rand eines bestimmten Volumens wird oft in From von Graphen oder Gleichungen gegeben. Die richtigen Integrationsgrenzen in einem bestimmten Koordinatensystem zu finden ist oftmals der schwierigste Teil einen solchen Aufgabe und soll daher hier geübt werden.

In einer Fahrradlampe altmodischer Art befindet sich ein elektrisch geladener Schleim. Die Fahrradlampe hat die Form eines sogenannten *Rotationsparaboloiden* und kann mathematisch durch den Teil des Graphen der Funktion $f(x_1, x_2) = 1 - (x_1^2 + x_2^2)$ beschrieben werden, der positive Werte hat. Das Innere der Lampe wird also durch diesen Graphen nach oben begrenzt und durch die x_1-x_2-Ebene nach unten. Der elektrische Schleim habe eine ortsabhängige Ladungsdichte von $\rho(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 \frac{C}{m^8}$. Berechne die Gesamtladung die nötig ist, um den Schleim zu neutralisieren in **a)** kartesischen Koordinaten und **b)** Zylinderkoordinaten, und bilde **c)** die Perfekt-Form des Verbes *„ableiten“*.
Tipp: Es gilt

$$\int_0^\pi \cos^2(w) \sin^8(w) dw = \frac{7\pi}{256}.$$