Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. A. Knorr
Christopher Witte
Juliane Strassner
4. Dezember 2001

7. Übungsblatt zur Einführung in die Theoretische Physik II

Abgabe: Donnerstag 13.12.01 in der Vorlesung

Aufgabe 13 (12 Punkte): *Induktionsgesetz: Generator vs. Dynamo*

In einem Generator (G) wird Spannung erzeugt, indem in einem unveränderlichen Magnetfeld eine Spule rotiert wird. In einem Dynamo (D) rotiert ein Dauermagnet um eine ortsfeste Spule und erzeugt dadurch ebenfalls eine Spannung. Beide Effekte können durch das Induktionsgesetz der Elektrodynamik beschrieben werden, und zwar am sinnfälligsten in seiner integralen Form.

Wir geben in den beiden unterschiedlichen Fällen jeweils ein Magnetfeld und eine parametrisierte Leiterschleife vor. Die Leiterschleife bewegt sich im Falle des Generators und jeder materielle Punkt der Schleife zu festem Parameterwert definiert eine Geschwindikeit $\vec{\mathbf{v}}$. Die induzierte Umlaufspannung in der Schleife ist die pro Ladung zu verrichtende Arbeit beim Transport durch die Schleife:

$$U_{ind} = \oint (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot d\vec{l},$$

wobei der zweite Summand durch die Lorentz-Kraft auf die Ladungsträger in der bewegten Leiterschleife entsteht und im nichtbeweglichen Fall verschwindet (s. VL). **Die Induktionsspannung ist in beiden folgenden Fällen zu berechnen.**

G: Die rotierende Schleife ist durch die zeitveränderliche Kurve

$$\vec{c}(\phi, t) = R(\cos\phi\, , \sin\phi\cos\omega t\, , \sin\phi\sin\omega t\,)$$

gegeben. Das Magnetfeld sei homogen in z-Richtung $\vec{\mathbf{B}} = B_0\vec{\mathbf{e}}_z$, d.h. B_0 ist eine Konstante.

D: Die Schleife ist durch die zeitlich unveränderte Kurve

$$\vec{c}(\phi) = R(\cos\phi\, , \sin\phi\, , 0)$$

gegeben. Das Magnetfeld sei zu jedem Zeitpunkt homogen aber zeitveränderlich: $\vec{\mathbf{B}}(\vec{r}, t) = B_0(\sin\omega t\,\vec{\mathbf{e}}_y + \cos\omega t\,\vec{\mathbf{e}}_z)$ mit B_0 wieder einer Konstanten.

Freiwilliger Teil (4 Zusatzpunkte): Leite die integrale Form des Induktionsgesetzes

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt}\Phi$$

aus der differentiellen

$$\nabla \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{B}}$$

her. Die Induktionsspannung war oben definiert, der magnetische Fluss Φ ist das Flächenintegral der magnetischen Induktion über die von der Schleife berandete Fläche. Benutze dazu den Stokes'schen Satz und beachte, dass die Schleife zeitveränderlich sein kann. Man benötigt daher das sogenannte Raynold'sche Transporttheorem für Flächen:

$$\frac{d}{dt}\int_F \vec{\mathbf{X}} \cdot d\vec{S} = \int_F \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{X}} + (\nabla \cdot \vec{\mathbf{X}})\vec{\mathbf{v}}\right) \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial F} (\vec{\mathbf{X}} \times \vec{\mathbf{v}}) \cdot d\vec{l},$$

wobei $\mathbf{X}(\mathbf{r}, t)$ ein zeitveränderliches Vektorfeld und $F(t)$ eine zeitveränderliche stückweise glatt durch ∂F berandete Fläche, deren zeitliche Veränderung das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ definiert, sei.

Interpretiere das Ergebnis des ersten Aufgabenteils im Hinblick auf dieses Egebnis.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 14 (8 Punkte): *Kontinuitätsgleichung, Abhängigkeiten der Maxwell-Gleichungen*

In der VL haben wir gesehen, dass die Forderung der Gültigkeit einer Kontinuitätsgleichung für Ladungs- und Stromdichte $\dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{j}} = 0$, notwendigerweise zur Ergänzung des Ampere'schen Durchflutungsgetzes durch den Maxwell'schen Verschiebungsstrom führt. Man kann nun zeigen, dass die vier Maxwellgleichungen konsistent miteinander sind, wenn man die Kontinuitätsgleichung voraussetzt und keine weiteren Ergänzungen zu den Quellgleichungen vornimmt.

Wir gehen von den folgenden zwei Maxwellgleichungen (Wirbelgleichungen) und der Kontinuitätsgleichung aus:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{\mathbf{E}} &= -\dot{\vec{\mathbf{B}}} \\ \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{\mathbf{B}} &= \epsilon_0 \dot{\vec{\mathbf{E}}} + \vec{\mathbf{j}} \\ \dot{\rho} + \nabla \cdot \vec{\mathbf{j}} &= 0. \end{aligned}$$

Folgere nun aus diesem Gleichungssystem, dass die zwei übrigen Maxwellgleichungen (Quellengleichungen)

$$\begin{aligned} \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{\mathbf{E}} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{B}} &= 0 \end{aligned}$$

konsistent mit den Wirbelgleichungen sind, wenn man deren Divergenz berechnet.