English summary

2 Network measures/characteristics

A network/graph consists of N nodes $v_1, \dots, v_N$ and L links e_{ij} connecting v_i and v_j
(vertices) (edges)

Size of a network: # nodes, # links

v_i is a neighbor of v_j, if the link e_{ij} exists

inspired from linear algebra/dyn. systems

adjacency matrix: $\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ with $a_{ij} = 1$, if link $\underbrace{v_j \text{ to } v_i}$ exists

$a_{ij} = 0$ otherwise

directed networks ($a_{ij} \neq a_{ji}$ possible)

weighted networks a_{ij} replaced by link weight $w_{ij} \in \mathbb{R}$

degree of a node $k_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$, $k_i^{(in)} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$, $k_i^{(out)} = \sum_{j=1}^{N} a_{ji}$

average degree $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2L}{N}$

degree distribution (i) random networks $p(k) \approx e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$ (Poisson)

(ii) scale-free networks $p(k) \sim k^{-\gamma}$

configuration model: given $p(k)$, construct network

(i) create enough nodes with stubs according to $p(k)$

(ii) connect stubs at random

Laplace matrix: $\Lambda_{ij} = \underbrace{\left(\sum_j a_{ij}\right)}_{k_i} \delta_{ij} - a_{ij} = \begin{cases} k_i & \text{for } i = j \\ -1 & \text{if edge } e_{ij} \text{ exists} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

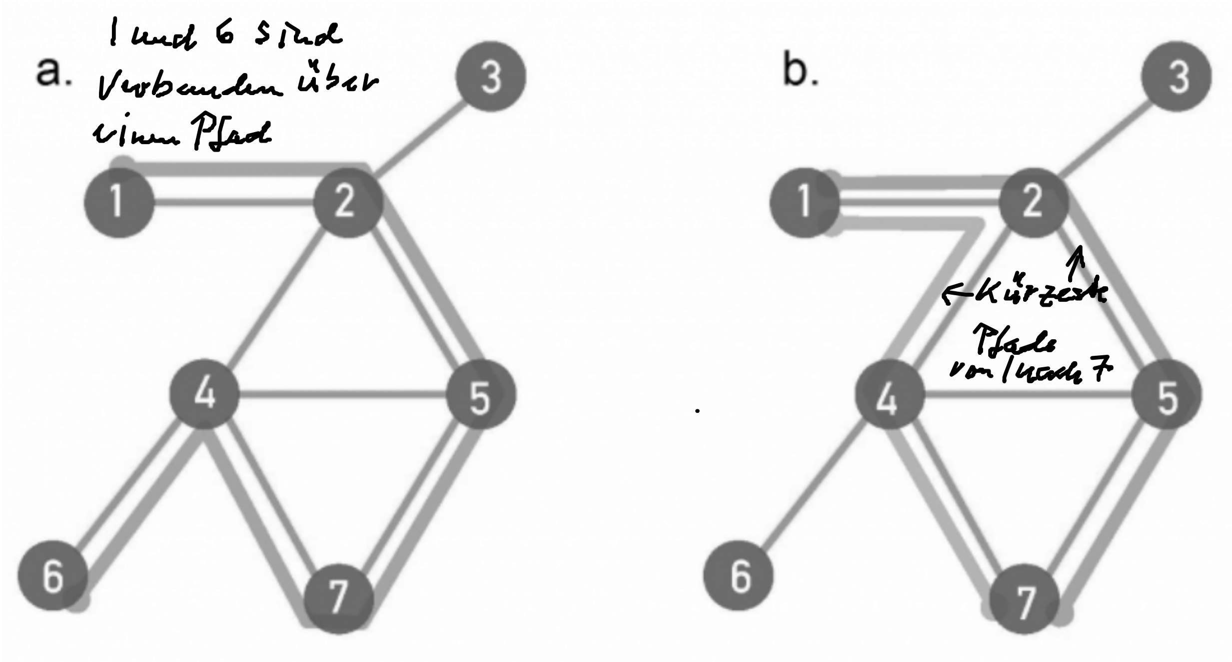
eigenvalues: $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} = 2$

2. Netzwerkcharakteristika (Fortsetzung)

Bisher: individuelle Eigenschaften von Knoten

Nun: Eigenschaften von mehreren Knoten

2 Knoten v_i und v_j heißen verbunden, wenn es eine Folge von Links gibt mit Start bei v_i und Ende bei v_j



Länge eines Pfades = # Links

kürzester Pfad definiert Abstand / Distanz d_{ij}

Ein Ring ist ein Pfad mit $v_i = v_j$ (cycle)

Ein Dreieck ist ein Ring der Länge 3

```
  1
 / \
3 — 2
```

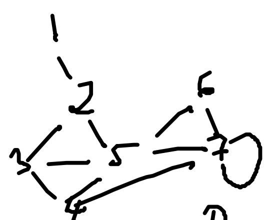
Ein Triple ist ein Pfad der Länge 2 $\quad 1 — 2 — 3$

Ein zyklisches / azyklisches Netzwerk enthält Ring / keine Ringe.

Konnektivität ist transitiv (v_i mit v_j verbunden und v_j mit v_k. Dann ist auch v_i mit v_k verbunden)

Der Durchmesser eines Netzwerks ist die Länge des maximalen kürzesten / längsten Pfades (im Beispiel von oben: $d = 3$)

Der durchschnittliche Abstand ℓ ist die durchschnittliche Länge aller kürzesten Pfade



Distanz-Matrix

$\underline{\underline{D}} =$

	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	$\sum_{j>i}$
1	0	1	2	3	2	3	3	14	14
2	1	0	1	2	1	2	2	9	8
3	2	1	0	1	1	2	2	9	6
4	3	2	1	0	1	2	1	10	4
5	2	1	1	1	0	1	1	7	2
6	3	2	2	2	1	0	1	11	1
7	3	2	2	1	1	1	1	10	0
								70 ohne Selbstkopplung	35

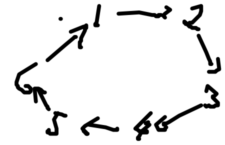
↑ Selbstkopplung

$$\ell = \frac{\sum_{i,j,i\neq j} d_{ij}}{N^2 - N} = \frac{70}{42}$$

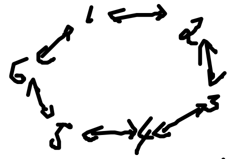
$$= \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i>j} d_{ij} = \frac{2 \cdot 35}{42}$$

für ungerichtete Netzwerke

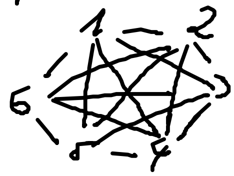
weitere Beispiele: unidirektionaler Ring

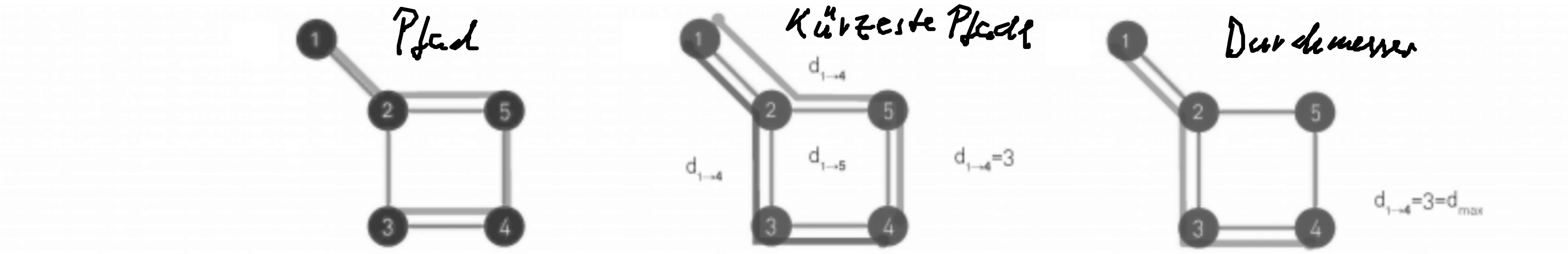


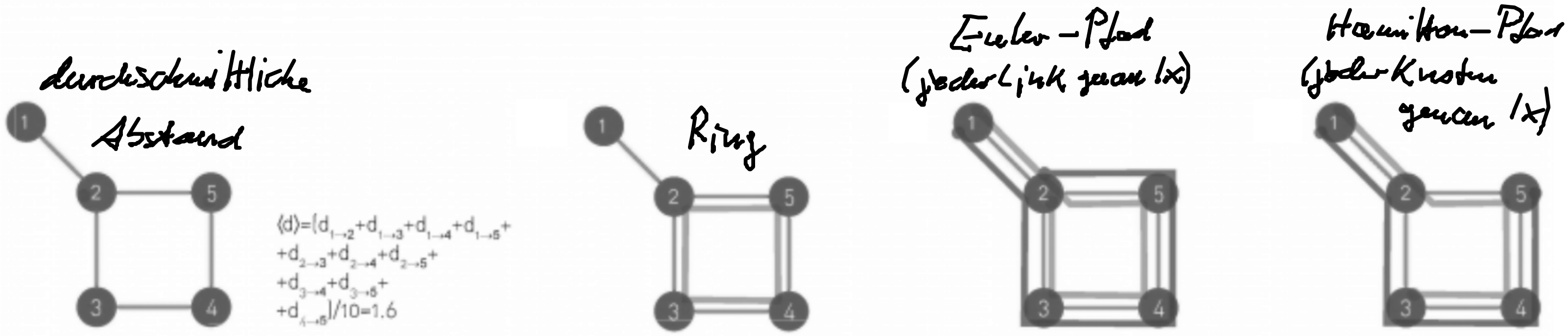
bidirektionalen Ring



vollständiges Netzwerk
all-to-all







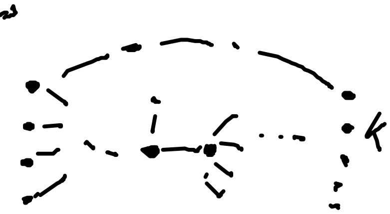
Eine Komponente, zu der ein Knoten v_i gehört, ist die Menge aller Knoten, die durch Pfade von v_i aus erreicht werden können.

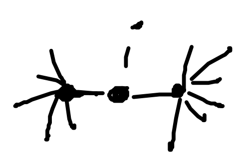
v_i und v_j in verschiedenen Komponenten $d_{ij}=\infty$

Effizienz $E = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{i,j \\ j\neq i}} (d_{ij})^{-1}$

Closeness L_i^{-1} = inverse durchschnittliche Abstand eines Knotens

Betweenness $b_i = \frac{\#\text{kürzesten Pfade von } v_j \text{ nach } v_k \text{ über } v_i}{\#\text{kürzesten Pfade von } v_j \text{ nach } v_k}$





Clusterkoeffizient:

Ausgangspunkt: Grad eines Knotens v_i: $k_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$

Frage: Wie viele meiner Nachbarn sind auch miteinander benachbart?

lokale Cluster-Koeffizient $C_i = \dfrac{\#\text{Links zwischen Nachbarn von } v_i}{\#\text{möglicher Links zwischen Nachbarn von } v_i} = \dfrac{2\,E_i}{n_i(n_i-1)}$

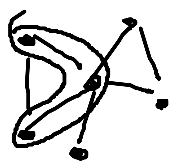
mit n_i Nachbarn (ggf. ohne v_i selbst) ohne Selbstkopplung $n_i = k_i$

Idee: $C_i = 1$ für vollständige Netzwerke

globaler Clusterkoeffizient: $C = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_i$

Alternative Definition:

$$C_\Delta = \frac{3\,\#\text{Dreiecke im Netzwerk}}{\#\text{(verbundene) Tripel}} = \frac{6\,\#\text{Dreiecke}}{\#\text{Pfade der Länge 2}}$$

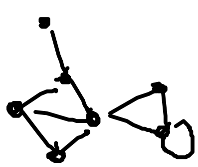


Unterschied: erst Dreiecke bzgl. Knoten i zählen und dann Mittelwert bilden oder Dreiecke im gesamten Netzwerk zählen

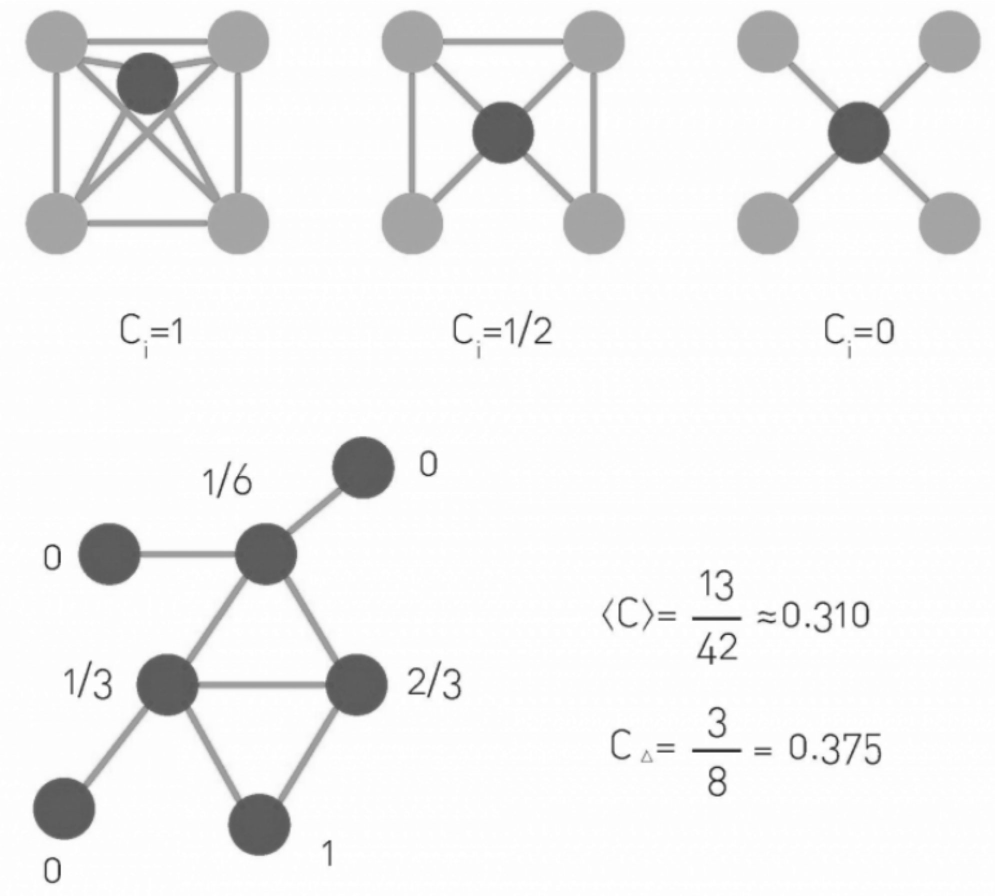
C berücksichtigt/gewichtet Knoten mit kleinem Grad stark

$$\#\text{Dreiecke} = \frac{1}{6}\sum_{i_1 i_2 i_3} \underbrace{a_{i_1 i_3}\, a_{i_3 i_2}\, a_{i_2 i_1}}_{=1,\text{ wenn } i_1, i_2, i_3 \text{ ein Dreieck bilden}} = \frac{1}{3!}\,\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{A}}^3\right)$$

Bsp.:



$C = \dfrac{56}{105}$



$C_i=1$
$C_i=1/2$
$C_i=0$
1/6
0
0
1/3
2/3
0
1
$\langle C \rangle = \frac{13}{42} \approx 0.310$
$C_{\triangle} = \frac{3}{8} = 0.375$