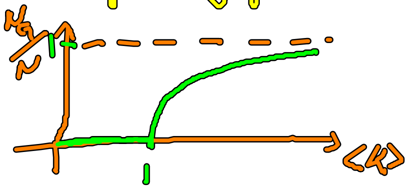
English summary

3.3 Random networks (continued)

Emergence of giant connected component



critical point $\langle k \rangle = 1$

real-world networks are not random and show a heavy tail in the degree distribution.

4. Graph theory

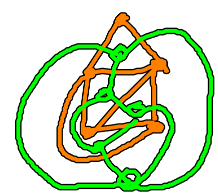
4.1 Euler's polyhedral formula

Def. 1 A graph G (set of vertices and edges) is called planar, if it can be embedded (drawn) in $\mathbb{R}^2$ without intersecting edges.

Euler's formula: For every connected, planar graph with N vertices, E edges and F faces, the following formula holds: $N - E + F = 2$

Proof by using duality:

$G \longleftrightarrow G^*$
$N \longleftrightarrow F^*$
$E \longleftrightarrow E^*$
$F \longleftrightarrow N^*$



Corollaries: Let G be a simple and planar graph. (no loops or multi-edges)
Then the following statements hold:

(i) There exist a vertex of G with degree 5 at most.

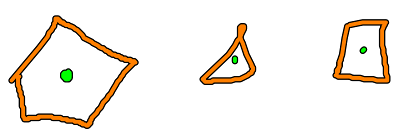
(ii) G has $3N-6$ edges at most.

(iii) If the edges of G are 2-colored, then there exists a node of G with 2 color changes at most in cyclic order of its edges.

4.2 Museumswächterproblem

Frage: Wie viele Wächter werden höchstens benötigt, um ein Museum flächendeckend zu überwachen?

Bsp.: (i) Konvexer Grundriss:



#Wächter = 1

(ii) beliebiger Grundriss?

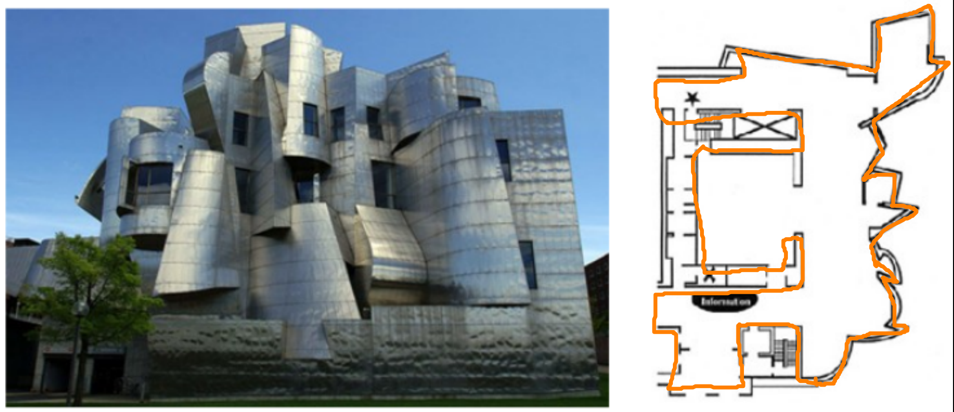
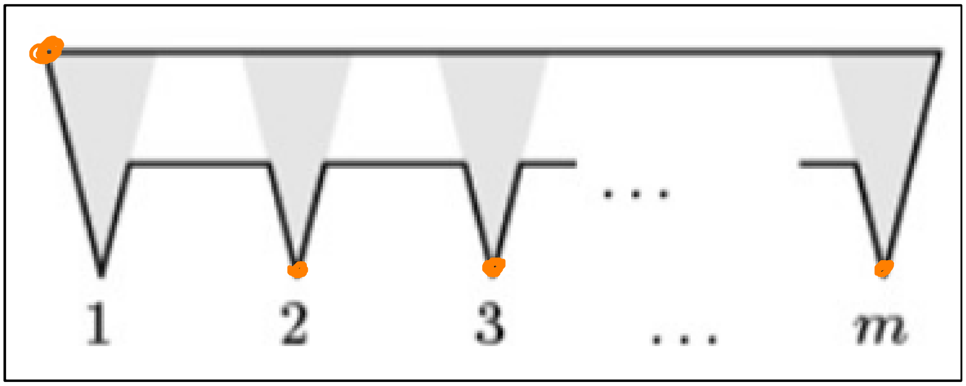


Abb.2: Weisman Art Museum, Minneapolis, USA [10]



$\#$Wächter $= m$

$\#$Wände $= n = 3m$ $\Rightarrow \frac{n}{3} = m$

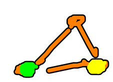
$\#$Kanten $= \#$Ecken

Satz: Für jedes Museum mit n Wänden reichen $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter aus.

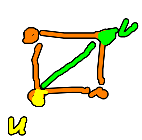
Beweis: Verbinde Ecken des Polygons (Grundriss) mit $n-3$ Diagonalen zu einer Triangulierung (ohne zusätzliche Ecken).

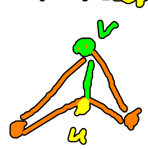
Zeige, dass der entstandene ebene Graph 3-färbbar ist.

benachbarte Knoten haben unterschiedliche Farbe

Fall $n=3$ trivial, weil konvexes Polygon (Dreieck) 

$n \geq 4$: Wähle 2 Ecken u und v, die durch eine Diagonale verbunden werden können





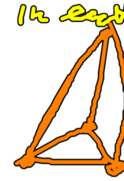
Kante im Inneren

Teilung in kleinere Untergraphen, die nach Induktionsannahme 3-färbbar sind.

Sei Farbe $c(u) = 1$ und $c(v) = 2$.

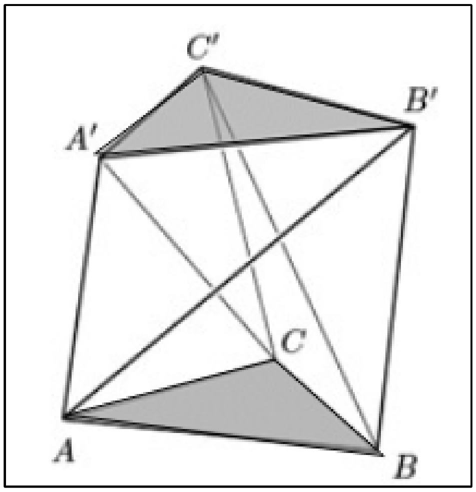
$\Rightarrow$ Zusammenkleben der Untergraphen durch evtl. Umfärben eines Untergraphen.

Wähle eine Farbe aus und positioniere Wächter in entsprechenden Ecken.



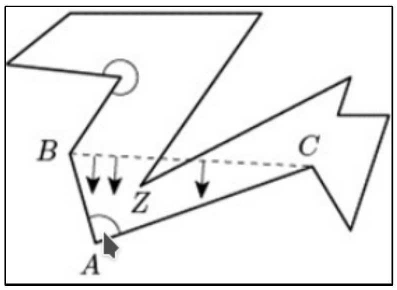
Annahme im Beweis: Triangulierung ist immer möglich.

Gilt schon in $\mathbb{R}^3$ nicht mehr für 3D-Polyeder und Zerlegung in Tetraeder ohne zusätzliche Ecken/Kanten. (Dreiecke in 3D)



Schönhardt-Polyeder

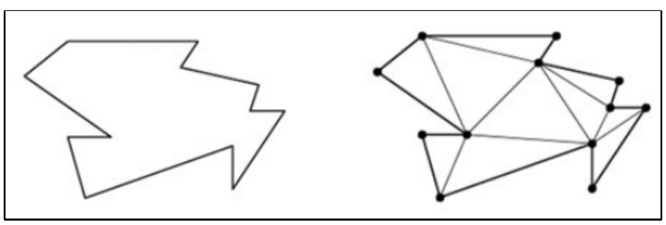
Aber in 2D geht's für ebene Polygone.

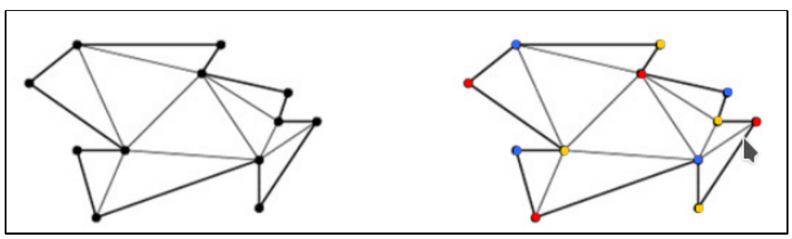


Starte mit Ecke mit spitzem Winkel.

(i) Nachbarn können durch Diagonale verbunden werden.

oder (ii) Es gibt einen untersten Punkt Z zur Bildung einer Diagonale.





1. Die Wandwächter (G. Toussaint)

Definition. *Ein Wandwächter ist ein Wächter, der an einer Wand des Museums entlang läuft, und alles überwacht, was von irgendeinem Punkt der Wand aus zu sehen ist.*

Frage. Wie viele solche „Wandwächter" brauchen wir, um das gesamte Museum zu überwachen?

Antwort.
- I.A. können $\lfloor n/4 \rfloor$ Wächter nötig sein (siehe Abb.)
- Vermutung: Diese Anzahl reicht auch aus (außer für einige kleine Werte von n). Ein Beweis ist nicht in Sicht.

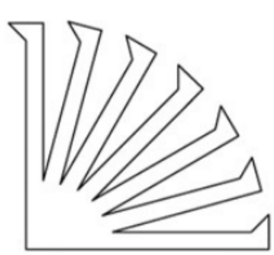


Abb. 9: Dieses Polygon hat n = 28 Seiten/Ecken (und 4m Seiten i.a. Fall).[1]

4.3 Satz von Turan

Keine Schleifen oder doppelte Kanten

p Knoten vollständig verbunden

Sei G ein einfacher Graph, der keine p-Clique enthält.

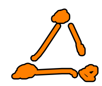
Frage: Wie viele Kanten kann G höchstens haben?

Satz: Wenn ein Graph $G=(\overset{\text{Menge der Ecken}}{V},\overset{\text{Menge der Kanten}}{E})$ mit n Ecken keine p-Clique hat,

dann gilt $(p\geq 2)$: $\underbrace{|E|}_{\#\text{Kanten}=L} \leq \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}$

$p=2$: $|E| \leq \left(1-\frac{1}{2-1}\right)\frac{n^2}{2}=0$ 2-Clique 

$\Rightarrow$ Keine Kante

$p=3$: $|E| \leq \left(1-\frac{1}{3-1}\right)\frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{4}$ 3-Clique 

$\Rightarrow$ Ein dreiecksfreier Graph mit n Ecken hat höchstens $\frac{n^2}{4}$ Kanten.

Beweis: k_i: Grad von Ecke i $\Rightarrow \sum_{i\in V} k_i = 2|E|$

Sei $\{i,j\}$ eine Kante: Da G keine Dreiecke enthält, haben i und j keine gemeinsamen Nachbarn. $k_i+k_j\leq n$

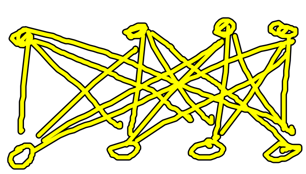
k_i tritt genau k_i-mal auf (alle k_i Kanten bei i beitragen)

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{\sum_{(i,j)\in E} k_i+k_j}_{\sum_{i\in V} k_i^2} \leq n|E|\end{array}\right\} \quad n|E| \geq \sum_{i\in V} k_i^2 \underset{\text{Ungleichung von Cauchy}}{\geq} \frac{\left(\sum_{i\in V} k_i\right)^2}{n}$$

$\langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2 \leq |\underline{a}|^2|\underline{b}|^2$

$\underline{a}=(k_1,\dots,k_n)$, $\underline{b}=(1,\dots,1)$

$$\Rightarrow \quad n|E| \geq \frac{\left(\sum_{i\in V} k_i\right)^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n} \quad \text{oder} \quad \frac{n^2}{4}\geq |E|$$

bipartiten Graphen:  $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$

allgemeiner Fall: $n\leq p-1$ trivial (kein p-Clique möglich)

$$|E| \le \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{(p-1)^2}{2} = \frac{p-2}{2}$$

$n \ge p$: Sei G ein Graph mit maximaler Kantenzahl ohne p-Cliquen

$\Rightarrow$ G hat $(p-1)$-Cliquen (sonst könnten noch Kanten hinzugefügt werden).

$V = \{v_1, \dots, v_n\}$ Knotenmenge

Sei A ein $(p-1)$-Cliquen und $B = V \setminus A$

$\#$ Kanten in $A = \binom{p-1}{2}$

Abschätzung von Kanten $e_{A,B}$ zwischen A und B und e_B innerhalb von B

(i) $e_B \le \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{[n-(p-1)]^2}{2}$

(ii) $e_{A,B} \le (p-2)\,(n-p-1)$ sonst gäbe es eine p-Clique $A \cup$ Knoten, der mit allen Knoten in A verbunden ist

$p-1$

$$|E| \le \binom{p-1}{2} + \left(1-\frac{1}{p-1}\right)\frac{(n-p-1)^2}{2} + (p-2)(n-p-1)$$

$\vdots$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p-1}\right)n^2$$