5. Übung zu Complex Networks

zu Aufgabe 4.3 Katz-Zentralität der Knoten eines k-regulären Netzwerks

Katz-Zentralität ist gegeben durch folgende Gleichung:

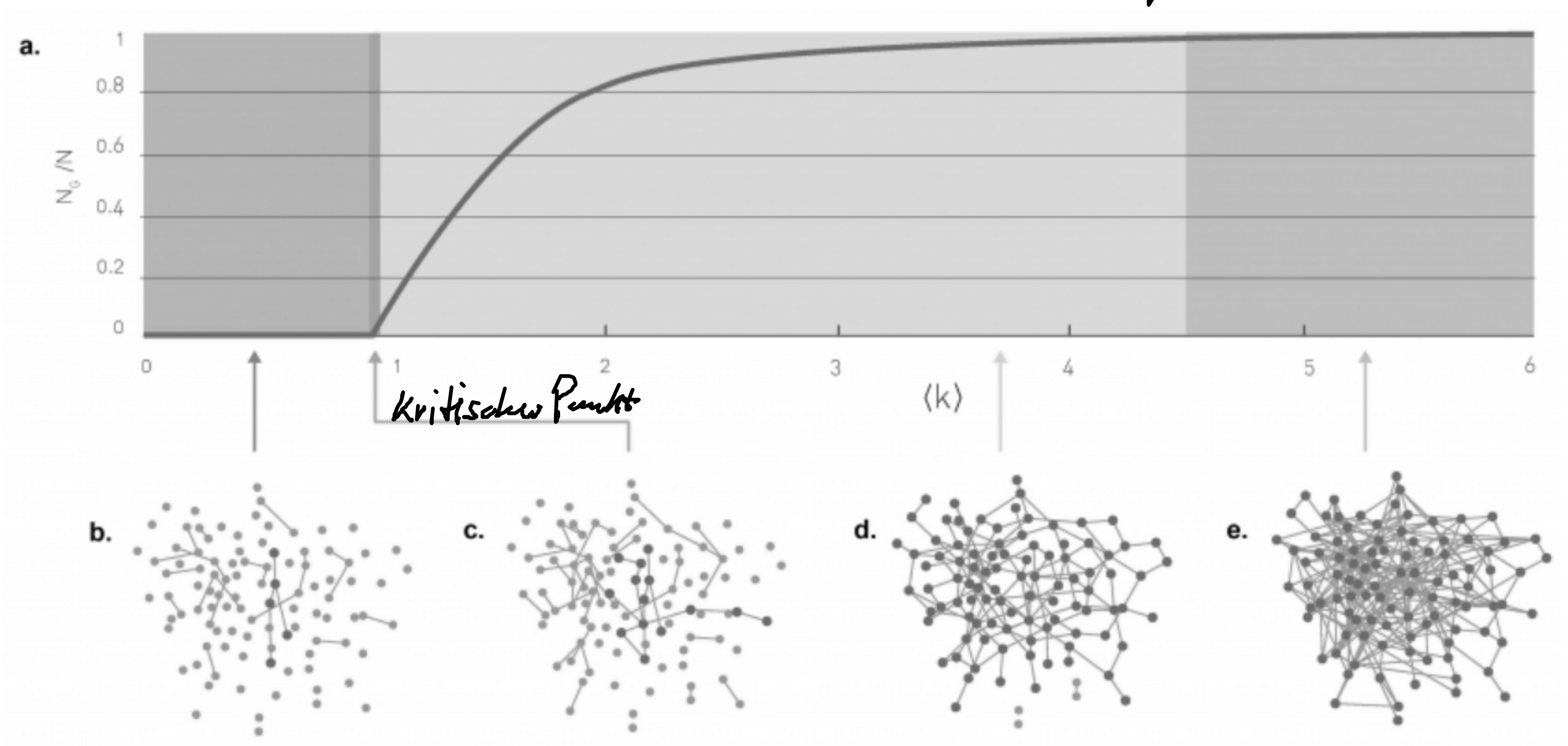
$$\underline{x} = \left(\underline{\underline{I}} - \alpha \underline{\underline{A}}\right)^{-1} \underline{1} = \left(\underline{\underline{I}} + \alpha \underline{\underline{A}} + \alpha^2 \underline{\underline{A}}^2 + \dots\right)\underline{1} \underset{\uparrow}{=} \left(1 + \alpha k + \alpha^2 k^2 + \dots\right)\underline{1}$$

aus 4.1: $\underline{\underline{A}}\,\underline{1} = k\,\underline{1}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha k)^n \underline{1} = \frac{1}{1-\alpha k}\,\underline{1}$$

und somit $x_i = \frac{1}{1-\alpha k}$

Zufallsnetzwerke: Entstehen der giant connected component bei $\langle k \rangle = 1$



Sei $u = 1 - N_G/N$ der Anteil der Knoten, der nicht in der giant component ist. Das entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Knoten nicht zur giant component gehört.

Ein Knoten v_i der giant component ist mit anderen Knoten der giant component verbunden.

Ein Knoten v_i, der nicht zur giant component gehört, hat 2 Möglichkeiten:

(i) Es gibt keinen Link zu einem Knoten der giant component

(ii) v_i hat einen Link, aber Nachbar gehört nicht zur giant component.

Zusammengefasst: $$\Big(\underbrace{1-\overset{\overset{\text{Wk, dass beliebiger existiert}}{\downarrow}}{p}}_{\text{kein Link zu Knoten der giant component}} + \underbrace{pu}_{\text{Link zu Knoten außerhalb der giant component}}\Big)^{N-1}$$ ← alle potentiellen Nachbarn

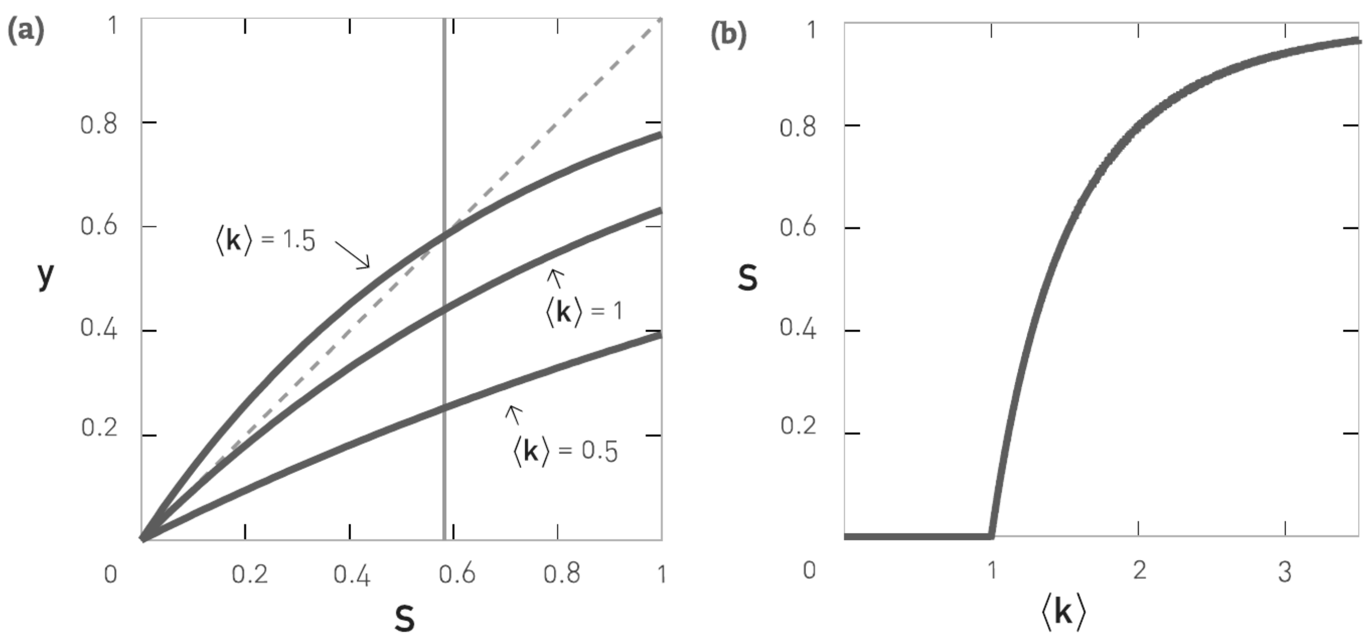
= Wk, dass v_i nicht zur giant component gehört/verbunden ist

Suche Lösung der Gleichung $u = (1-p+pu)^{N-1} \Rightarrow N_G = N(1-u)$, $p = \frac{\langle k\rangle}{N-1}$

$$\ln u = (N-1)\ln\left(1-\frac{\langle k\rangle}{N-1}(1-u)\right) \underset{N \gg \langle k\rangle}{\approx} (N-1)\left(-\frac{\langle k\rangle}{N-1}(1-u)\right) = -\langle k\rangle(1-u)$$

oder auch $$\underbrace{u}_{1-\frac{N_G}{N}} \approx e^{-\langle k\rangle(1-u)} \Leftrightarrow \frac{N_G}{N} = 1 - e^{-\langle k\rangle \frac{N_G}{N}}$$

$$S \approx 1 - e^{-\langle k\rangle S}$$



Lösung $S \neq 0$ ab einer Steigung von 1 im Ursprung (bei $S=0$)

$$1 \overset{!}{=} \frac{d}{dS}\left(1-e^{-\langle k\rangle S}\right)\Big|_{S=0} = \langle k\rangle e^{-\langle k\rangle S}\Big|_{S=0} = \langle k\rangle$$ $\Rightarrow$ Kritischer Punkt liegt bei $\langle k\rangle = 1$

Für größere mittlere Grad entsteht eine giant component.

Sind Freunde (im Zufallsnetzwerk) populärer (größerer Grad) als ich?

Mein Grad : $\langle k\rangle$

WK, einen Stumpf zu ziehen, der zu einem Knoten mit Grad k gehört: $\frac{N(k)\,k}{2L}$

$$\frac{N(k)\,k}{2L} = \frac{N\,p(k)\,k}{2L} = \frac{k\,p(k)}{\frac{2L}{N}} = \frac{k\,p(k)}{\langle k\rangle} = \frac{k\,p(k)}{\sum_j j\,p(j)}$$ Normierung ist gegeben

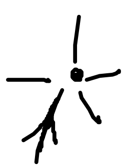
Durchschnittlicher Grad eines Nachbarn $\sum_k k\,\frac{k\,p(k)}{\langle k\rangle} = \frac{\sum k^2 p(k)}{\langle k\rangle} = \frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle}$

Differenz zu mir: $\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} - \langle k\rangle = \frac{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle^2}{\langle k\rangle} = \frac{\sigma^2(k)}{\langle k\rangle} > 0$

$$\frac{\langle k^2\rangle}{\langle k\rangle} > \langle k\rangle$$ Mein (zufälliger) Nachbar hat größeren Grad als ich. (Freundschaftsparadoxon)

Excess degree distribution: q_{k-1}: WK, einen weiteren/anderen Link zu finden, der von einem Knoten mit Grad k wegführt

Grad 5



$$q_{k-1} = \frac{k\,p(k)}{\langle k\rangle} \quad \overset{\substack{k-1\to k\\ k\to k+1}}{\Longleftrightarrow} \quad q_k = \frac{(k+1)\,p(k+1)}{\langle k\rangle}$$

$$\langle q_k\rangle = \sum_k k\,q_k = \;\dots\; = \frac{\langle k^2\rangle - \langle k\rangle}{\langle k\rangle}$$ durchschnittliche #Knoten, die 2 Links von mir entfernt sind.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k+1)\,p(k+1)}{\langle k\rangle} \underset{\substack{k=n-1\\ k+1=n}}{=} \frac{1}{\langle k\rangle}\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\,n\,p(n) = \frac{\sum_n n^2 p(n) - \sum_n n\,p(n)}{\langle k\rangle}$$

Erzeugende einer Wahrscheinlichkeitsverteilung: $G_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \overset{=p(k)}{p_k}\, x^k$

$$\Rightarrow p_k = \frac{1}{k!}\left.\frac{d^k G_0(x)}{dx^k}\right|_{x=0}$$

Erzeugende von q_k: $G_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k = \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,p_{k+1}\,x^k}{\langle k\rangle} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k\,p_k\,x^{k-1}}{\langle k\rangle} = \frac{G_0'(x)}{\langle k\rangle}$

Eigenschaften der Erzeugenden:

(i) $G_0(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ Normierung

(ii) $G_0'(1) = \sum_{k=0}^{\infty} k\, p_k = \langle k \rangle$

(iii) n-tes Moment: $\langle k^n \rangle = \left[\left(x \frac{d}{dx} \right)^n G_0(x) \right]_{x=1}$

Wahrscheinlichkeitserzeugende der Binomialverteilung:

$$G_0(x) = \sum_{k=0}^{N} p(k)\, x^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k} x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \binom{N-1}{k} (px)^k (1-p)^{N-1-k}$$

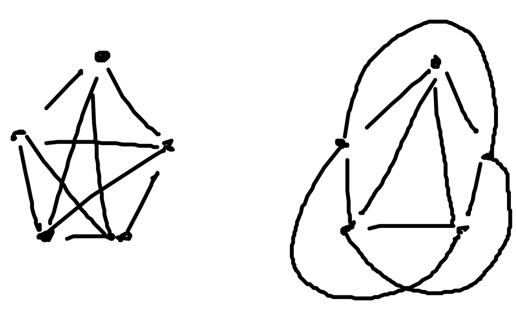
$$= (px + 1 - p)^{N-1}$$

mittlerer Grad: $G_0'(x)\big|_{x=1} = (N-1)\, p\, (px+1-p)\big|_{x=1} = (N-1)\, p = \langle k \rangle$

Eulersche Polyederformel: $N - E + F = 2$ für zusammenhängende planare Graphen

N: #Knoten, E: #Kanten, F: #Flächen

K_5:



Beobachtung: jede Fläche hat 3 Kanten, die sie begrenzen

durchschnittliche Seitenzahl der Gebiete/Flächen: $\frac{2E}{F}$

Für K_5: $N = 5$, $E = \binom{N}{2} = 10$

Wenn Eulersche Polyederformel gilt: $N - E + F = 2 \iff F = E + 2 - N = 7$

$$\frac{2E}{F} = \frac{20}{7} < 3$$

Es müsste eine Fläche mit Seitenzahl kleiner 3 existieren ↯