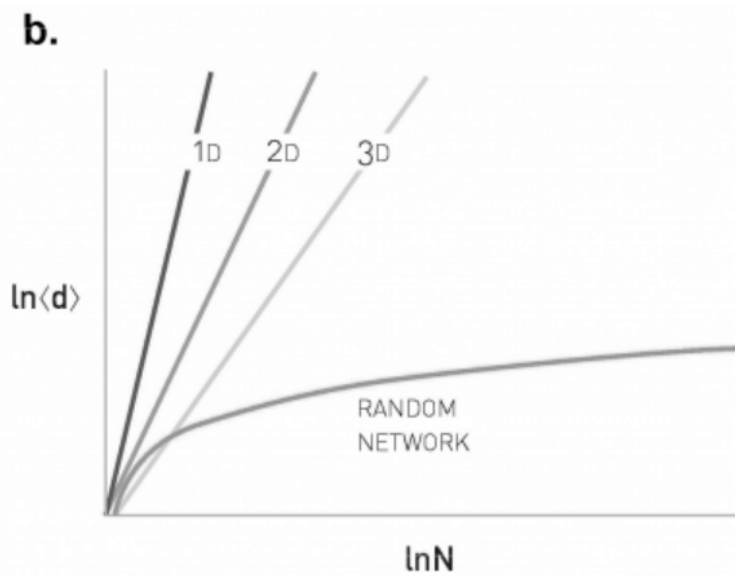
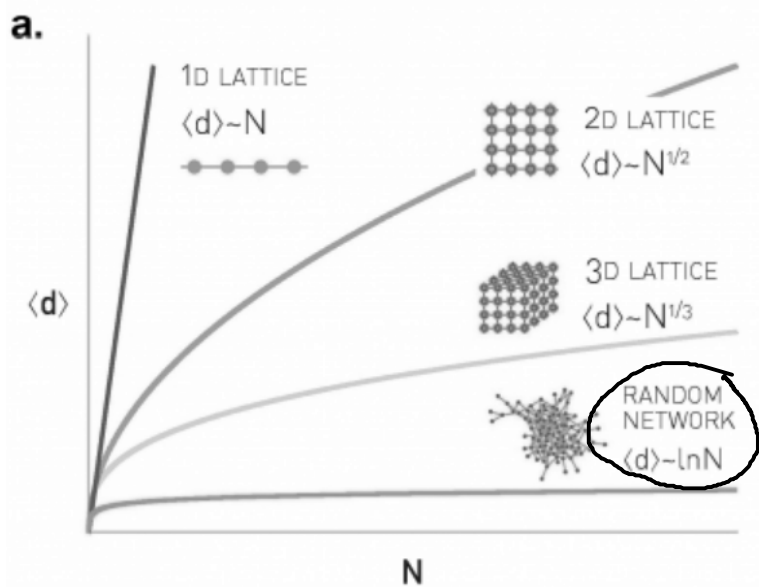


# 6. Übung zu Complex Networks

## Aufgabe 6.31

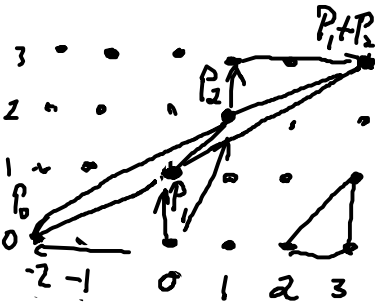


## Aufgabe 71

Network	$N$	$L$	$\langle k \rangle$	$\langle d \rangle$	$d_{\max}$
Internet	192,244	609,066	6.34	6.98	26
WWW	325,729	1,497,134	4.60	11.27	93
Power Grid	4,941	6,594	2.67	18.99	46
Mobile-Phone Calls	36,595	91,826	2.51	11.72	39
Email	57,194	103,731	1.81	5.88	18
Science Collaboration	23,133	93,437	8.08	5.35	15
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	3.91	14
Citation Network	449,673	4,707,958	10.43	11.21	42
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	2.98	8
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	5.61	14

Z.B. mit Network X-Routine  $\text{info}(\sigma) \Rightarrow \text{ liefert } N \setminus \text{ und } \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$

Satz von Pick: jedes Innenwinkel  $< 180^\circ$   $\Delta$  Kontax nicht Kontax  
 Ein Kontaxes Polygon  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt elementar, wenn die Ecken ganzzahlig sind,  
 es aber keine weiteren ganzzahligen Punkte enthält. (weder auf dem Rand noch  
 im Inneren)



Lemma: Jedes elementare Dreieck  $\Delta = \text{conv}\{P_0, P_1, P_2\}$  hat  
 die Fläche  $A(\Delta) = \frac{1}{2}$ . ↑ Kontaxe Hülle

Beweis: Erweiterung von  $\Delta$  zu Parallelogramm

$$\text{conv}\{P_0, P_1, P_2, P_1 + P_2 - P_0\} = P = \Delta \cup \nabla(\Delta)$$

$\nabla: x \mapsto P_1 + P_2 - x$ . Beobachtung:  $P$  ist auch  
 elementar.

Ganzzahlige Verschiebungen / Translationen von  $P$  überdecken  $\mathbb{R}^2$ .

$\Rightarrow \{P_1 - P_0, P_2 - P_0\}$  ist eine Basis mit Determinante = 1

$|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}| = |\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}| = 1$ . Es existiert eine umkehrbare Abbildung  $\underline{Q}$

für den Basiswechsel  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{Q}$  mit  $|\det \underline{Q}| = 1$  ← oder jede andere ONB ganzzahlige  
 (wegen  $\underline{Q} \underline{Q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ) (wegen  $\det \underline{Q} \det \underline{Q}^{-1} = 1$ )

Determinante der neuen Basis  $|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| = |\det \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \underline{Q} \right)|$   
 $= |\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \det \underline{Q}| = |\det \underline{Q}| = 1$

$\Rightarrow$  Fläche von Parallelogramm  $P$ ,  $A(P) = 1 \Rightarrow A(\Delta) = \frac{1}{2}$

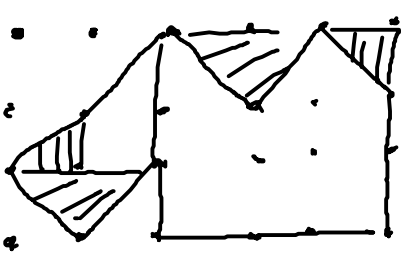
Satz von Pick:

Die Fläche eines Polygons  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  mit ganzzahligen Ecken ist durch

$$A(Q) = n_{in} + \frac{1}{2} n_{ra} - 1$$

gegeben, wobei  $n_{in}$  und  $n_{ra}$  die Anzahl

ganzzahliger Punkte innerhalb bzw auf dem Rand von  $Q$  sind.



$$\left. \begin{array}{l} n_{in} = 5 \\ n_{rd} = 13 \end{array} \right\} A(Q) = 5 + \frac{13}{2} - 1 = 10,5$$

Beweis: Idee: Triangulierung von  $Q$  mit allen Punkten im Inneren oder auf dem Rand.

Betrachte diese Triangulierung als ebenen Graphen mit 1 unbeschränktem Außengebiet und  $f-1$  Dreiecken der Fläche  $\frac{1}{2}$ :  $A(Q) = \frac{1}{2}(f-1)$

Jedes Dreieck hat 3 Seiten, wobei  $e_{in}$  (Kante im Inneren) 2 Dreiecke begrenzt und  $e_{rd}$  (Kante auf dem Rand) 1 Dreieck begrenzt.

Anzahl der Kanten:  $3(f-1) = 2e_{in} + e_{rd}$ . Außerdem:  $e_{rd} = n_{rd}$

$$3(f-1) = 3f - 3 = 2e_{in} + e_{rd} \quad e = e_{rd} + e_{in} \Rightarrow e_{in} = e - e_{rd}$$

$$\Rightarrow f = 2(e_{in} - f) + e_{rd} + 3 \stackrel{e_{rd} = n_{rd}}{=} 2(e - f) + e_{rd} - 2e_{rd} + 3$$

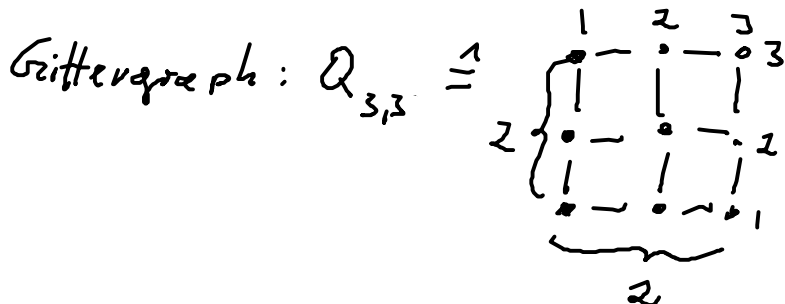
$$\stackrel{n - e + f = 2}{=} 2(e - f) - e_{rd} + 3 \stackrel{e_{rd} = n_{rd}}{=} 2(e - f) - n_{rd} + 3$$

$$\stackrel{n - e + f = 2}{=} 2(n - 2) - n_{rd} + 3 = 2(n_{in} + n_{rd}) - n_{rd} - 1$$

$$= 2n_{in} + n_{rd} - 1$$

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f-1) = \frac{1}{2}(2n_{in} + n_{rd} - 2)$$

$$= n_{in} + \frac{1}{2}n_{rd} - 1 \quad \square$$



$$|E| = 2nm - n - m$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 - 3 = 12$$

Knoten im Inneren haben Grad 4

$$nm - 2m - 2(n-2)$$

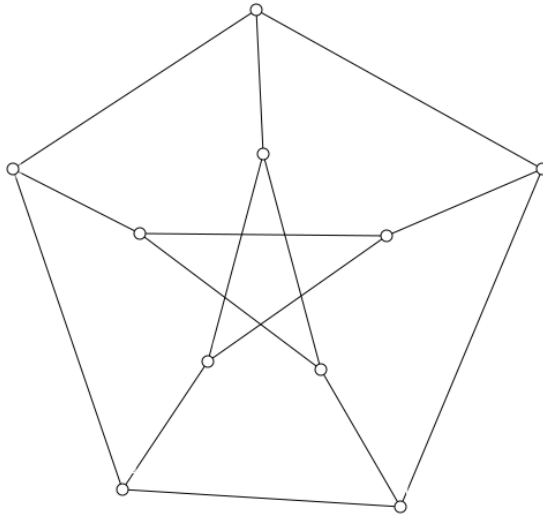
Knoten als Ecke  $\{(1,1), (1,m), (n,1), (n,m)\}$  haben Grad 2 4

Restliche Randknoten haben Grad 3.  $2(m-2) + 2(n-2)$

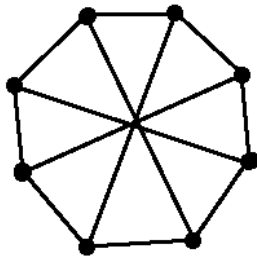
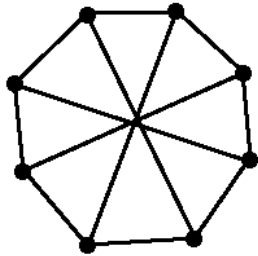
$$\sum_{u,v} k_{u,v} = 2|E| = 4(4nm - 2m - 2(n-2)) + 4 \cdot 2 + 3(2(m-2) + 2(n-2))$$

$$= 4nm - 2n - 2m \Rightarrow |E| = 2nm - n - m$$

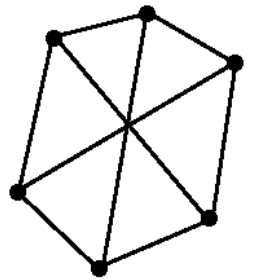
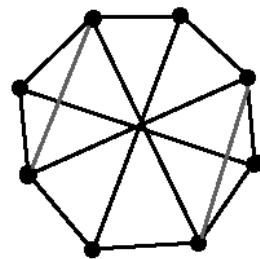
Petersen-Graph:



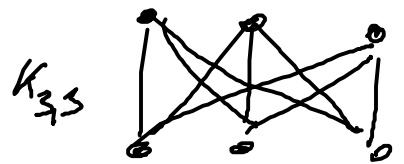
Untergraph:



Subdivision of G



G



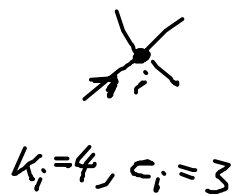
Nachtrag / Ergänzung zur excess degree distribution:

excess degree  $e_i = n \Rightarrow$  Grad von Knoten  $i$ ,  $k_i = k+1$

$$P_{u=c} = q_n = \frac{(n+1) P_{k=k+1}}{\langle k \rangle}$$

$$q_k = \frac{(k+1) P_{k+1}}{\langle k \rangle}$$

Wk für Grad  $k$



## Wahrscheinlichkeit für exzessdegree $k$

Jeder ebene Graph ist 6-färbbar: In jedem  $n$  ist Anzahl der Ecken.  
(Knoten)

$n = 5, 6$ , trivial

$n > 6$ : Wir wissen, jeder ebene Graph hat eine Ecke vom Grad höchstens 5.

Entferne diese Ecke und es bleiben noch  $n-1$  übrig.

Die entfernte Ecke erhält eine von ihren Nachbarn unterschiedliche Farbe.