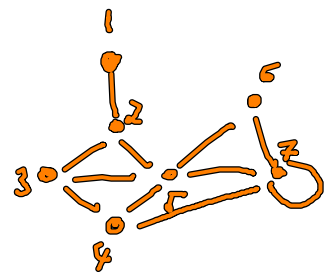


2. Übung zu complex networks



Repräsentation eines Netzwerkes:

(i) Adjazenzmatrix

$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } j \text{ i.a.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$A =$

0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

(ii) Linkliste: Liste von Knoten-Tupeln

$(1,2), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5), (5,6), (6,7), (7,7), (4,7)$

z.B. Richtung codiert durch Reihenfolge

$\# \text{ Links} = L$ (hier $L=11$) als Länge der Liste

Auffinden eines bestimmten Links durch Durchgehen der Liste

(iii) Adjazenz-Liste: Speichern der Nachbarn

Knoten	Nachbarn	Grad
1	2	1
2	1, 3, 5	3
3	2, 4, 5	3
4	3, 5, 7	3
5	2, 3, 4, 6, 7	5
6	5, 7	2
7	4, 5, 6, 7	4

Grad = Länge der Nachbarliste

$\# \text{ Start und Endpunkte} = \# \text{ Nachbarn}$
Summiert

Zentralitätsmaße

Frage: wie zentral/wichtig ist ein Knoten?

(i) wichtig $\hat{=}$ hoher Grad, nicht alle Nachbarn gleich zu werden sind

\rightarrow Bestimmte Nachbarn wichtiger als andere $\hat{=}$

(ii) Eigenvektor-zentralität: Wichtigkeit eines Knotens höher, wenn seine Nachbarn

Wichtigkeit der Nachbarn von Knoten i : $x_i' = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j$ $\Rightarrow \underline{x}' = \underline{A} \underline{x}$ Wichtigkeit von Knoten j

Betrachte Iterationen i : $\underline{x}(t) = \underline{A}^t \underline{x}(0)$

Darstellung von \underline{x} in der Basis der Eigenvektoren von \underline{A} : $\underline{x}(0) = \sum_{i=1}^N c_i \underline{v}_i$ Eigenvektoren von \underline{A}
Eigenwert λ_i

$$\underline{x}(t) = \underline{A}^t \sum_i c_i \underline{v}_i = \sum_i c_i \lambda_i^t \underline{v}_i = \lambda_i^t \sum_i c_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^t \underline{v}_i$$

$\underline{A} \underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ $\max \lambda_i = \lambda_1$

mit $\frac{\lambda_i}{\lambda_1} < 1$ für alle $i \neq 1$ folgt im Grenzfalle $t \rightarrow \infty$: $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = c_1 \lambda_1^t \underline{v}_1$

Bestimmungsgleichung für die Wichtigkeit eines Knotens: $\underline{A} \underline{x} = \lambda_1 \underline{x}$

$$x_i = \lambda_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j$$

implizite Gleichung für x_i

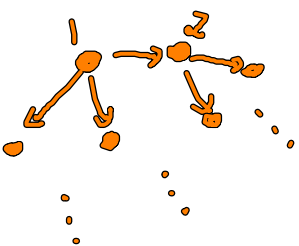
λ_1 wirkt als Skalierungsfaktor zwischen der Summe der Wichtigkeiten der Nachbarn und dem Knoten selbst ($x_i' \leftrightarrow x_i$)

Fazit: Wichtigkeiten x_1, x_2, \dots, x_N als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underline{x} = \frac{1}{\lambda_1} \underline{A} \underline{x}$$

Vorteil: Wichtigkeit hoch bei vielen Nachbarn (hoher Grad) oder bei wichtigen Nachbarn

Problem: gerichtetes Netzwerk



$$x_1 = 0 \quad \text{weil } k_1^{(in)} = 0$$

\Rightarrow Knoten 2 profitiert von Link $1 \rightarrow 2$ nicht

Lösung: Katz-Zentralität: kostenlos Grundwichtigkeit für alle

⇒ Erweitern der Bestimmungsgleichung: $x_i = \alpha \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j + \beta$

oder auch $\underline{x} = \beta \left(\underline{I} - \alpha \underline{A} \right)^{-1} \underline{1}$ $\Leftrightarrow \underline{x} = \alpha \underline{A} \underline{x} + \beta \underline{1}$ (I)

Einkaufsmatrix

Da nur relative Wichtigkeit ausschlaggebend ist, wähle $\beta = 1$.

Achtung: $\det(\underline{A} - \alpha^{-1} \underline{I}) \neq 0$ gewährleisten. Sonst gibt es Divergenzen.
 oder bei $\alpha = \frac{1}{\lambda_1}$

Wähle Parameter α entsprechend.

Problem: Knoten mit hohem out-degree werden wichtiger zu allen Nachbarn, aber häufig sind Absender mit vielen Adressaten eher weniger wichtig als bei einem einzelnen Empfänger.

Lösung: Page Rank: gewichte Nachbarn wichtig mit dem Ausgangsgrad der Nachbarn

$$x_i = \alpha \sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{x_j}{k_j^{out}} + \beta$$

$k_i^{out} = 1$ wenn kein Ausgangsknoten vorhanden ist

⇒ $\underline{x} = \alpha \underline{A} \underline{D}^{-1} \underline{x} + \beta \underline{1}$ mit \underline{D} ist Diagonalmatrix mit $d_{ii} = \max(k_i^{out}, 1)$
 wenn im Upl. zu Katz

⇒ Auflösen nach \underline{x} liefert: $\underline{x} = \beta \left(\underline{I} - \alpha \underline{A} \underline{D}^{-1} \right)^{-1} \underline{1}$
 $= \beta \underline{D} \left(\underline{D} - \alpha \underline{A} \right)^{-1} \underline{1}$

Ähnliche Warnung wie bei Katz-Zentralität: $\alpha < \max$ Eigenwert von $\underline{A} \underline{D}^{-1}$

Bsp: Google verwendet $\alpha = 0.85$, $\beta = 1$

Page Rank wurde 1996 vorgestellt. (Namen in Anlehnung an Larry Page)

ohne β -Term: $x_i = \alpha \sum_{j=1}^N a_{ij} \frac{x_j}{k_j^{out}}$ ⇒ Lösung des Gleichungssystems?
 $x_i \sim k_i$