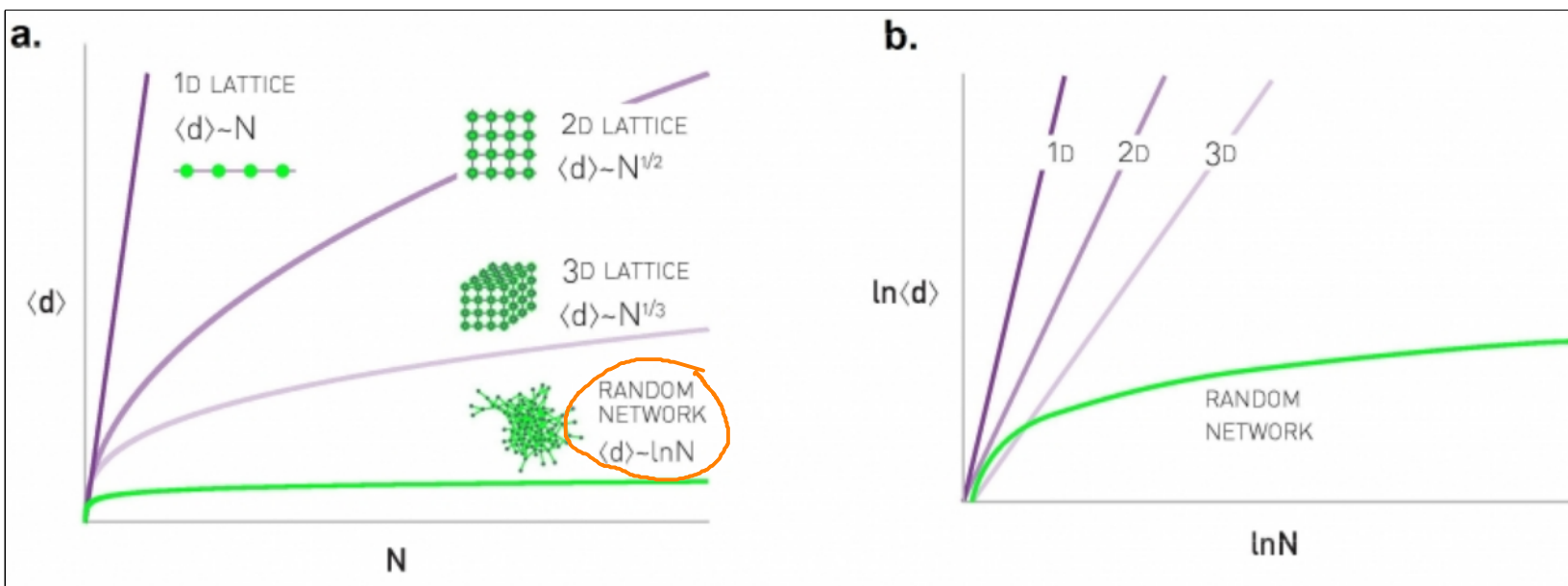


Übung zu Complex Networks

Aufgabe 6.31

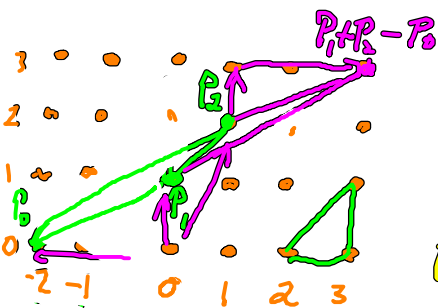


Aufgabe 7.1

Network	N	L	$\langle k \rangle$	$\langle d \rangle$	d_{\max}
Internet	192,244	609,066	6.34	6.98	26
WWW	325,729	1,497,134	4.60	11.27	93
Power Grid	4,941	6,594	2.67	18.99	46
Mobile-Phone Calls	36,595	91,826	2.51	11.72	39
Email	57,194	103,731	1.81	5.88	18
Science Collaboration	23,133	93,437	8.08	5.35	15
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	3.91	14
Citation Network	449,673	4,707,958	10.43	11.21	42
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	2.98	8
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	5.61	14

z.B. mit Network X-Routine $\text{info}(G) \rightarrow \text{List of } N \setminus \text{und } \langle k \rangle = \frac{2k}{n}$

Satz von Pick: $\left. \begin{array}{l} \text{jedes Innenwinkel } < 180^\circ \\ \Delta \text{ konvex} \end{array} \right\} \text{ nicht konvex}$
 Ein konvexes Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt elementar, wenn die Ecken ganzzahlig sind,
 es aber keine weiteren ganzzahligen Punkte enthält. (weder auf dem Rand noch
 in Innern)



Lemma: Jedes elementare Dreieck $\Delta = \text{conv}\{P_0, P_1, P_2\}$ hat
 die Fläche $A(\Delta) = \frac{1}{2}$. \uparrow konvexe Hülle

Beweis: Erweiterung von Δ zu Parallelogramm
 $\text{conv}\{P_0, P_1, P_2, P_1 + P_2 - P_0\} = P = \Delta \cup \nabla(\Delta)$
 $\nabla: x \mapsto P_1 + P_2 - x$. Beobachtung: P ist auch
 elementar.

Ganzzahlige Verschiebungen / Translations von P überdecken \mathbb{R}^2 .

$\Rightarrow \{P_1 - P_0, P_2 - P_0\}$ ist eine Basis mit Determinante = 1

$|\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}| = |\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| = 1$. Es existiert eine invertierbare Abbildung Q

für den Basiswechsel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q$ mit $|\det Q| = 1$ \leftarrow oder jede andere ODB $\left. \begin{array}{l} \text{ganzzahlige} \\ \text{wegen } Q Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \det Q Q^{-1} = \det Q \det Q^{-1} = 1$

Determinante der neuen Basis $|\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}| = |\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Q|$
 $= |\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \det Q| = |\det Q| = 1$

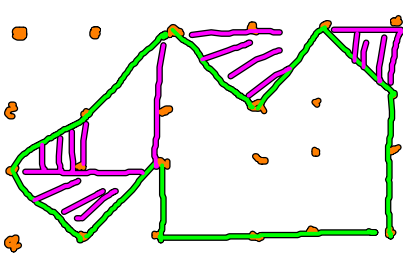
\Rightarrow Fläche von Parallelogramm P , $A(P) = 1 \Rightarrow A(\Delta) = \frac{1}{2}$

Satz von Pick:

Die Fläche eines Polygons $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit ganzzahligen Ecken ist durch

$A(Q) = n_{in} + \frac{1}{2} n_{ra} - 1$ gegeben, wobei n_{in} und n_{ra} die Anzahl

ganzzahliger Punkte innerhalb bzw. auf dem Rand von Q sind.



$$\left. \begin{array}{l} n_{in} = 5 \\ n_{rd} = 13 \end{array} \right\} A(Q) = 5 + \frac{13}{2} - 1 = 10.5$$

Beweis: Idee: Triangulierung von Q mit allen Punkten im Inneren oder auf dem Rand.

Betrachte diese Triangulierung als ebenen Graphen mit 1 unbeschränktem Außengebiet und $f-1$ Dreiecken der Fläche $\frac{1}{2}$: $A(Q) = \frac{1}{2}(f-1)$

Jedes Dreieck hat 3 Seiten, wobei e_{in} (Kante im Inneren) 2 Dreiecke begrenzt und e_{rd} (Kante auf dem Rand) 1 Dreieck begrenzt.

Anzahl der Kanten: $3(f-1) = 2e_{in} + e_{rd}$. Außerdem: $e_{rd} = n_{rd}$

$$3(f-1) = 3f - 3 = 2e_{in} + e_{rd} \quad e = e_{rd} + e_{in} \Rightarrow e_{in} = e - e_{rd}$$

$$\Rightarrow f = 2(e_{in} - f) + e_{rd} + 3 = 2(e - f) + e_{rd} - 2e_{rd} + 3$$

$$= 2(e - f) - e_{rd} + 3 \stackrel{e_{rd} = n_{rd}}{=} 2(e - f) - n_{rd} + 3$$

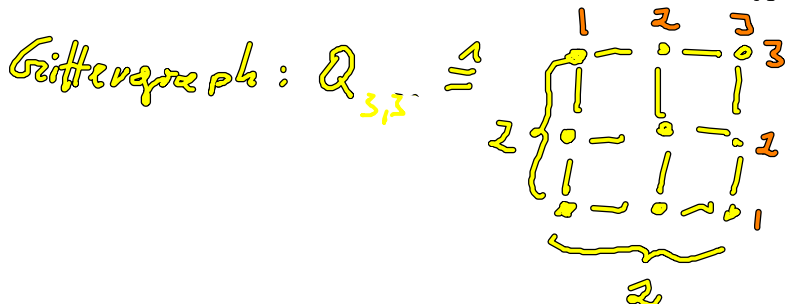
$$n - e + f = 2$$

$$\stackrel{2}{=} 2(n - 2) - n_{rd} + 3 = 2(n_{in} + n_{rd}) - n_{rd} - 1$$

$$= 2n_{in} + n_{rd} - 1$$

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f-1) = \frac{1}{2}(2n_{in} + n_{rd} - 2)$$

$$= n_{in} + \frac{1}{2}n_{rd} - 1 \quad \square$$



$$|E| = 2n_m - n - m$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 - 3 = 12$$

Knoten im Inneren haben Grad 4

$$n_m = 2m - 2(n-2)$$

Knoten als Ecken $\{(1,1), (1,m), (k,1), (k,m)\}$ haben Grad 2 4

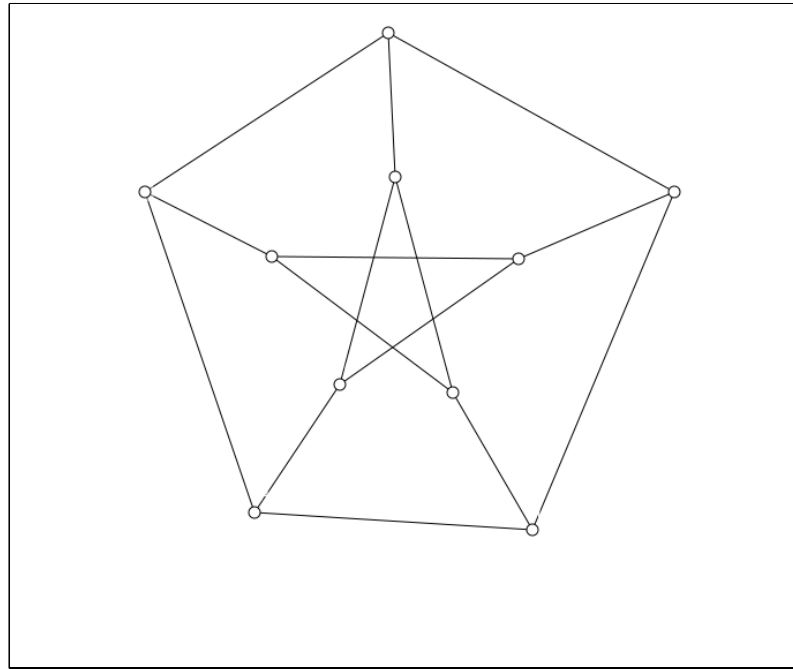
Restliche Randknoten haben Grad 3.

$$2(m-2) + 2(k-2)$$

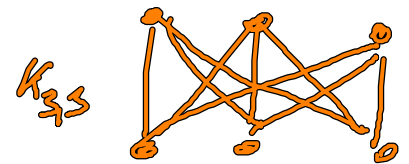
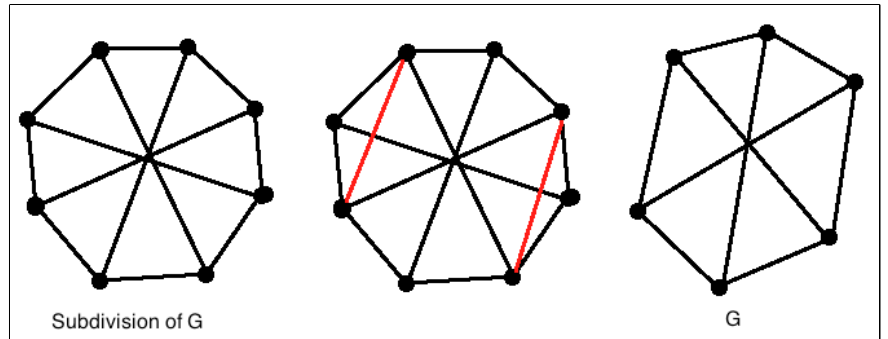
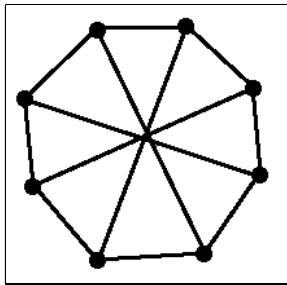
$$\sum_{u,v} k_{uv} = 2|E| = 4(4m - 2m - 2(m-2)) + 4 \cdot 2 + 3(2(m-2) + 2(k-2))$$

$$= 4m - 2k - 2m \Rightarrow |E| = 2km - k - m$$

Petersen-Graph:



Ungerader Graph:



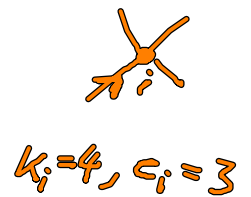
Nachtrag/Ergänzung zur excess degree distribution:

excess degree $e_i = n \Rightarrow$ Grad von Knoten i : $k_i = k+1$

$$P_{n=e} = q_n = \frac{(k+1) P_{k=k+1}}{\langle k \rangle}$$

$$q_k = \frac{(k+1) P_{k+1}}{\langle k \rangle}$$

↑ \leftarrow \leftarrow
Wahl Gradk



$k_i = 4, e_i = 3$

Wahrscheinlichkeit für exzessive K

Jeder ebene Graph ist 6-färbbar: In Abhängigkeit von Anzahl der Ecken.

$n = 5, 6$, trivial
(Knoten)

$n > 6$: Wir wissen, jeder ebene Graph hat eine Ecke vom Grad höchstens 5.

Entferne diese Ecke und es bleiben noch $n-1$ übrig.

Die entfernte Ecke erhält eine von ihren Nachbarn unterschiedliche Farbe.