

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD
UE: Dipl.-Phys. Judith Lehnert

Projekte zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Durchführung

Die Projekte beinhalten Aufgaben aus verschiedenen Bereichen der nichtlinearen Dynamik und Kontrolle und können nach eigenen Vorstellungen bearbeitet werden (Numerik, Analytik, Zusammenfassung der Literatur, Experimente . . .). Die in jeder Projektbeschreibung aufgeführten Punkte können als Leitfaden dienen, Sie können aber auch in Absprache mit den BetreuerInnen eigene Ideen verfolgen.

Die Projekte sind so konzipiert, dass die Bearbeitung mit der angegebenen Literatur und dem Wissen aus der Vorlesung möglich ist.

Zur vollständigen Bearbeitung gehören folgende Punkte:

1. Bearbeitung des Projekts in Zweier- oder Dreiergruppen
2. Präsentation der Ergebnisse in einem 15 minütigen Kurzvortrag (+5 Minuten Diskussion) am 7.2 oder 8.2.12. Wichtig ist hierbei in erster Linie die verständliche Darstellung. Beschränken Sie sich deshalb auf die zum Verständnis wesentlichen Punkte.
3. Abgabe einer schriftlichen Ausarbeitung mit vollständiger Dokumentation der Lösungswege und vollständigen Quellenangaben bis 15.2.13. Auch hier steht die Verständlichkeit und übersichtliche Darstellung im Vordergrund. Der Umfang der Ausarbeitung soll fünf bis zehn Seiten umfassen.

Während der gesamten Bearbeitungszeit stehen Ihnen die BetreuerInnen des jeweiligen Projektes für Fragen zur Verfügung. Bitte machen Sie individuell Termine mit den Betreuern aus.

Projekt 1: Synchronisation in Netzwerken: Master stability function

Betreuer: Judith Lehnert (lehnert@itp.tu-berlin.de, ER246)

In vielen natürlichen und technischen Netzwerken tritt Synchronisation auf: Im Gehirn ist Synchronisation Bestandteil vieler kognitiver Prozesse, kann aber auch pathologisch werden, beispielsweise bei Parkinson oder Epilepsie. Zur Anwendung in der Kryptographie wird chaotische Synchronisation von Lasern untersucht.

Die hohe Dimension des Phasenraums – bedingt durch die große Anzahl von Knoten – macht numerische Untersuchungen der Stabilität schnell aufwändig. Die *master stability function* (MSF) erlaubt die Reduzierung auf ein System von der Dimension eines einzelnen Netzwerkknoten [1, 2, 3, 4] und ermöglicht es so, Dynamik und Topologie getrennt zu betrachten.

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Erstellen Sie ein Bifurkationsdiagramm für die Henon-Map:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= 1 - ax_k^2 + y_k, \\y_{k+1} &= bx_k,\end{aligned}$$

mit $b = 0.3$ in Abhängigkeit von a .

- Berechnen Sie die MSF für ein System aus N gekoppelten Henon-Maps

$$\begin{aligned}x_{k+1}^i &= 1 - a(x_k^i)^2 + y_k^i + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} x_k^j, \\y_{k+1}^i &= bx_k^i, \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

Betrachten Sie den Fall $0 = \sum_{j=1}^N G_{ij}$ und wählen Sie drei verschiedene Werte für a :

- (i) vor der ersten Periodenverdopplung
- (ii) nach der ersten Periodenverdopplung
- (iii) im Bereich des Chaos

Wenn möglich berechnen Sie die MSF analytisch.

- Informieren Sie sich über *circulant matrices*. Berechnen Sie die Eigenwerte der Kopplungsmatrizen für Systeme mit N Einheiten, die in folgender Art gekoppelt sind:
 1. *unidirektionaler Ring*: Die Elemente sind unidirektional (in eine Richtung) im Ring miteinander verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
 2. *bidirektionaler Ring*: Die Elemente sind bidirektional (in beide Richtungen) im Ring miteinander verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
 3. *all-to-all coupling*: Jedes Element ist mit jedem Anderen verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
- Geben Sie für die drei a -Werte jeweils ein Beispiel für Netzwerke mit mindestens drei Elementen an (Zeilensumme 0), für die die Synchronisation stabil bzw. instabil ist. Tragen Sie dazu die Eigenwerte $\sigma\gamma_k$ der Matrix σG in den entsprechenden Plot der MSF ein. Simulieren Sie die Beispiele direkt und überprüfen Sie so Ihr Ergebnis.

Literatur

- [1] L. M. Pecora and T. L. Carroll: *Master stability functions for synchronized coupled systems*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2109 (1998).
- [2] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. U. Hwang: *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics Reports **424**, 175 (2006).
- [3] J. Lehnert: *Dynamics of Neural Networks with Delay*, Master's thesis, Technische Universität Berlin (2010).
- [4] J. Lehnert, T. Dahms, P. Hövel, and E. Schöll: *Loss of synchronization in complex neural networks with delay*, Europhys. Lett. **96**, 60013 (2011).

Projekt 2: *Odd-number limitation*

Betreuer: Judith Lehnert (lehnert@itp.tu-berlin.de, ER246)

Lange Zeit glaubte man, dass periodische Orbits mit einer ungeraden Anzahl reeller Floquetexponenten größer null weder mit zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle (TDFC) noch mit erweiterter zeitverzögerter Rückkopplungskontrolle (EDFC) stabilisiert werden können. Der, wie sich später zeigte, nur teilweise korrekte Beweis wurde durch Nakajima erbracht [1]. Erst ein Gegenbeispiel, die zeitverzögerte Rückkopplungskontrolle einer subkritischen Hopfbifurkation, zeigte, dass die odd-number limitation in ihrer ursprünglichen Form nicht gelten kann [2]. Es stellte sich heraus, dass Nakajimas Beweis zwar richtig ist für nicht-autonome Systeme, nicht aber für autonome. Für autonome Systeme ist eine Modifizierung des ursprünglichen Theorem möglich, die eine zusätzlich Bedingung für die Unkontrollierbarkeit eines Orbits durch TDFC [3] oder EDFC [4] aufstellt. In diesem Projekt soll vor allem die Kontrollierbarkeit eines odd-number-Orbits mit EDFC untersucht werden.

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Implementieren Sie die EDFC zur Kontrolle eines durch eine subkritischen Hopfbifurkation erzeugten instabilen periodischen Orbits (System aus [2].) Testen Sie, ob für $R = 0$ das System bis zum erwarteten Wert b_c stabilisiert, wobei b_0 die Kopplungsstärke ist.
- Untersuchen Sie nun die Stabilität für $R \neq 0$, in dem Sie beispielsweise ein Stabilitätsdiagramm für die R - b_0 -Ebene erstellen.
- Leiten Sie analytisch die Stabilitätsgrenze unter Benutzung von Ref. [4] her und vergleichen Sie diese mit Ihren numerischen Ergebnissen.
- Stellen Sie ein Experiment zur Stabilisierung eines odd-number-Orbits vor [5, 6].
- Optional: Erstellen Sie ein Diagramm $\tilde{\tau}(b)$ wie Fig. 1 in Ref. [3] für die EDFC.

Literatur

- [1] H. Nakajima: *On analytical properties of delayed feedback control of chaos*, Phys. Lett. A **232**, 207 (1997).
- [2] B. Fiedler, V. Flunkert, M. Georgi, P. Hövel, and E. Schöll: *Refuting the odd number limitation of time-delayed feedback control*, Phys. Rev. Lett. **98**, 114101 (2007).
- [3] E. W. Hooton and A. Amann: *Analytical limitation for time-delayed feedback control in autonomous systems*, Phys. Rev. Lett. **109**, 154101 (2012).
- [4] A. Amann and E. W. Hooton: *An odd-number limitation of extended time-delayed feedback control in autonomous systems*, Proc. R. Soc. (2013), to be published.
- [5] C. von Loewenich, H. Benner, and W. Just: *Experimental verification of Pyragas-Schöll-Fiedler control*, Phys. Rev. E **82**, 036204 (2010).
- [6] S. Schikora, H. J. Wünsche, and F. Henneberger: *Odd-number theorem: Optical feedback control at a subcritical Hopf bifurcation in a semiconductor laser*, Phys. Rev. E **83**, 026203 (2011).

Projekt 3: *Chimera states*

Betreuer: Judith Lehnert (lehnert@itp.tu-berlin.de, ER246)

Chimären sind Mischwesen aus der griechischen Mythologie. Homer beschreibt sie als feuerspeiende Monster mit einem Löwenkopf, dem Körper einer Ziege und dem Schwanz einer Schlange. In der Nichtlinearen Dynamik versteht man unter einem Chimera state einen Zustand gekoppelter identischer Oszillatoren, bei dem – trotz Fehlen jeglichen Symmetriebruches in der Kopplung – ein Teil der Oszillatoren kohärent oszilliert, wogegen der andere Teil sich inkohärent verhält [1]. Chimera states finden sich in Systemen nichtlokal gekoppelter, zeitdiskreter Maps oder chaotischer Oszillatoren [2]. In solchen Systemen kann ein Bifurkationsszenario für den Kohärenz-Inkohärenz Übergang beobachtet werden, bei dem erst einzelnen Streifen inkohärent oszillierender Knoten auftauchen und dann anwachsen, bis schließlich das gesamte Netzwerk inkohärent ist. Kürzlich gelang erstmals unabhängig von einander zwei Arbeitsgruppen der experimentelle Nachweis von Chimera states [3, 4]. Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Was bedeutet nichtlokale Kopplung? Wie sieht diese in einem kontinuierlichen Medium aus, wie in einem Netzwerken?
- Versuchen Sie nun selbst Chimera states in der logistischen Abbildung zu finden. Erstellen Sie dafür ein Bild analog zu Fig. 2 in [2]. Beachten Sie dabei, dass die Existenz von Chimera states empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt. Das System zeigt im Allgemeinen hohe Multistabilität.
- Beschreiben Sie eines der Experimente zur Existenz von Chimera states.

Literatur

- [1] D. M. Abrams and S. H. Strogatz: *Chimera states for coupled oscillators*, Phys. Rev. Lett. **93**, 174102 (2004).
- [2] I. Omelchenko, Y. L. Maistrenko, P. Hövel, and E. Schöll: *Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states*, Phys. Rev. Lett. **106**, 234102 (2011).
- [3] A. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy, P. Hövel, I. Omelchenko, and E. Schöll: *Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices*, Nature Physics **8**, 658 (2012).
- [4] M. R. Tinsley, S. Nkomo, and K. Showalter: *Chimera and phase cluster states in populations of coupled chemical oscillators*, Nature Physics **8**, 662 (2012).

Projekt 4: Synchronization im Stromnetz

Betreuer: Judith Lehnert (lehner@itp.tu-berlin.de, ER246)

Das Stromnetz der Vergangenheit war geprägt durch große Kohle-, Gas- und Atomkraftwerke und damit durch eine zentralisierte Struktur, wogegen der gegenwärtige Ausbau erneuerbarer Energie zu einer Dezentralisierung des Stromnetzes führt. Wichtige Voraussetzung für den stabilen Betrieb ist die Synchronization des gesamten Netzes. Wie wirkt sich die Dezentralisierung auf die Stabilität der Synchronization aus? Was muss beachtet werden beim Ausbau des Netzes, um die Synchronisierbarkeit des Netzes nicht zu gefährden?

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch [1, 2].
- Untersuchen Sie analytisch und numerisch zwei gekoppelte Oszillatoren (Gl. 3 in [1]).
- Wählen Sie einen der vier Netzbetreiber in Deutschland aus und untersuchen Sie, wie sich eine Dezentralisierung in dem von Ihnen ausgewählten Netz auswirken würde.
- Erklären Sie das Braess-Paradoxon. Führen Sie nach dem Zufallsprinzip 10 Links in Ihrem Netzwerk ein. Welche gefährden die Synchronization?

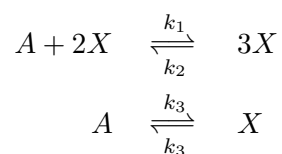
Literatur

- [1] M. Rohden, A. Sorge, M. Timme, and D. Witthaut: *Self-organized synchronization in decentralized power grids*, Phys. Rev. Lett. **109**, 064101 (2012).
- [2] D. Witthaut and M. Timme: *Braess's paradox in oscillator networks, desynchronization and power outage*, New Journal of Physics **14**, 083036 (2012).

Projekt 5: Frontausbreitung in einer bistabilen chemischen Reaktion

Betreuer: Thomas Isele (tommaso@itp.tu-berlin.de, ER 238)

Das Schlögl-Modell ist ein einfaches paradigmatisches Modell für ein bistabiles nichtlineares System [1, 2, 3, 4]. Es beschreibt einen Nichtgleichgewichtsphasenübergang erster Ordnung zwischen zwei stationären Zuständen und tritt bei chemischen Reaktionen der folgenden Art auf:



wobei X und A chemische Spezies sind und k_1, k_2, k_3, k_4 Reaktionsraten. Die Konzentration von A wird konstant gehalten, wogegen die Konzentration von X variabel ist.

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Stellen Sie die Übergangsraten für die Reaktion auf. Leiten Sie die Mastergleichung her.
- Leiten Sie die Ratengleichungen für die mittlere Konzentration x von X her und diskutieren Sie die stationäre Lösung. Falls Bistabilität vorliegt, kann es in einem räumlich ausgedehnten System mit Diffusion zu Koexistenz der zwei stationären Lösungen kommen. Leiten Sie die *equal area rule* (Maxwell-Konstruktion) für die räumliche Koexistenz her. Wenn die *equal area rule* verletzt ist, ist der eine Zustand metastabil, der andere ist stabil und entspricht einem globalen Minimum des Potentials $V(x)$ der Ratengleichung $\dot{x} = -V(x)$. Zeigen Sie, dass das zeitabhängige räumliche Profil eine Propagationsfront aufweist, die einem Übergang zu diesem Zustand entspricht. Leiten Sie die Geschwindigkeit der Front her.
- Bestimmen Sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung als Lösung der Mastergleichung. Vergleichen Sie die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeiten der zwei stationären Zustände mit der *equal area* Konstruktion und diskutieren Sie, warum dies zwei unterschiedliche Bedingungen gibt.

Literatur

- [1] C. W. Gardiner: *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer, Berlin, 2002).
- [2] F. Schlögl: *Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions*, Z. Phys. **253**, 147 (1972).
- [3] H. K. Janssen: *Stochastisches Reaktionsmodell für einen Nichtgleichgewichts-Phasenübergang*, Z. Phys. **270**, 67 (1974), 10.1007/BF01676796.
- [4] E. Schöll: *Nonlinear spatio-temporal dynamics and chaos in semiconductors* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001), Nonlinear Science Series, Vol. 10.

Projekt 6: *Chaoskontrolle in autonomen Laufrobotern*

Betreuer: Andrea Vüllings (andreav@mailbox.hu-berlin.de, EW632)

In der Vorlesung haben wir verschiedene Methoden zur Kontrolle von chaotischen Systemen kennengelernt. Eine leistungsstarke Methode bildet dabei die zeitverzögerte Rückkopplung [1]. Aufbauend auf diesem Kontrollverfahren wurde an der Universität Göttingen eine autonome Robotersteuerung entwickelt [2, 3]. Diese ermöglicht es, mittels eines einfachen chaotischen Systems und seiner Kontrolle zwischen verschiedene Gangarten zu wechseln. Mittlerweile wurde diese Technik erweitert, so dass der Laufroboter sogar Beschädigungen an den Beinen selbstständig kompensieren kann [4].

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Programmieren Sie das chaotische System aus Ref. [2] inklusive des Kontrollverfahrens und stabilisieren Sie periodische Orbits verschiedener Periode.
- Diskutieren Sie, wie die Kontrolle genutzt wird, um verschiedene Gangarten zu steuern, und weitere Aspekte der Steuerung wie Optimierung, Lernverhalten etc. (Ref. [2]).
- Erläutern Sie, wie es den Göttingern gelang, einen stabilen Gang trotz eines zerstörten Beines zu realisieren (Ref. [4]).

Literatur

- [1] K. Pyragas, K.: *Continuous control of chaos by self-controlling feedback*, Phys. Lett. A **170**, 421 (1992).
- [2] S. Steingrube, M. Timme, F. Wörgötter, P. Manoonpong: *Self-organized adaptation of a simple neural circuit enables complex robot behaviour*, Nature Physics **6**, 224 (2010).
- [3] E. Schöll: *Neural control: Chaos control sets the pace*, Nature Physics **6**, 161 (2010).
- [4] G. Ren, W. Chen, C. Kolodziejcki, F. Wörgötter, S. Dasgupta, P. Manoonpong: *Multiple chaotic central pattern generators for locomotion generation and leg damage compensation in a hexapod robot*, In proceeding of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems

Projekt 7: Laser mit optischer Rückkopplung (delayed-feedback)

Betreuer: Kathy Lüdge (luedge@physik.tu-berlin.de, EW741),
Benjamin Lingnau (lingnau@mailbox.tu-berlin.de, EW629), Christian Otto

Halbleiterlaser mit optischer Rückkopplung zeigen interessante Dynamik (u.a. Chaos) und sind für die Datenübertragung von praktischer Bedeutung. Die Dynamik wird im Phasenraum durch rotierende Wellen, die sog. "external cavity modes" (ECMs), strukturiert [1].

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Untersuchen Sie die ECMs und deren Stabilität.
 - Leiten Sie analytisch die Sattel-Knoten-Linien im Parameterraum der Feedback-Stärke und Feedback-Intensität her [1, 2, 3].
 - Finden Sie eine Bedingung für die erste Hopf-Bifurkation der ersten ECM Mode [2, 4]
- Simulieren Sie die Lasergleichungen und untersuchen Sie die verschiedenen dynamischen Regime.

Literatur

- [1] V. Rottschäfer and B. Krauskopf: *The ECM-backbone of the Lang-Kobayashi equations: a geometric picture*, Applied Nonlinear Mathematics Research Report, University of Bristol (2005), preprint.
- [2] C. Otto, K. Lüdge, E. A. Viktorov, and T. Erneux: *Quantum dot laser tolerance to optical feedback*, in *Nonlinear Laser Dynamics - From Quantum Dots to Cryptography*, edited by K. Lüdge (WILEY-VCH, Weinheim, 2012), chap. 6, pp. 141–162.
- [3] C. Otto, B. Globisch, K. Lüdge, E. Schöll, and T. Erneux: *Complex dynamics of semiconductor quantum dot lasers subject to delayed optical feedback*, Int. J. Bif. Chaos **22**, 1250246 (2012).
- [4] B. Globisch, C. Otto, E. Schöll, and K. Lüdge: *Influence of carrier lifetimes on the dynamical behavior of quantum-dot lasers subject to optical feedback*, Phys. Rev. E **86**, 046201 (2012).

Projekt 8: Halbleiterlaser mit optischer Injektion

Betreuer: Benjamin Lingnau (lingnau@mailbox.tu-berlin.de, EW629),
Kathy Lüdge (luedge@physik.tu-berlin.de, EW741)

Halbleiterlaser sind nichtlineare dynamische Systeme, die man schon mit wenigen Variablen gut beschreiben kann. Wird ein externes optisches Signal in einen Laserresonator eingekoppelt, zeigt der Laser je nach Art des Signals vielfältige dynamische Phänomene [1]. Ein spezielles Phänomen ist das sogenannte Phasenlocking, dabei kommt es zu einer Synchronisierung der Laserfrequenz mit der Frequenz des injizierten E-Felds [2]. Für kleine Injektionsstärken lässt sich dies als Spezialfall eines periodisch getriebenen Phasenoszillators auffassen, der sich mit der sogenannten Adlergleichung beschreiben lässt [3].

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch und diskutieren Sie das Modell und die Variablen, die zur Beschreibung eines Halbleiterlasers verwendet werden.
- Leiten Sie die Adlergleichung als Grenzfall aus den Lasergleichungen mit optischer Injektion her. Führen Sie eine Stabilitätsanalyse für die Adlergleichungen durch und klassifizieren Sie die auftretenden Bifurkationen [2].
- Asymptotische Analyse der Laser-Dynamik mit optischer Injektion
 - Bestimmen Sie ausgehend von den vollen Gleichungen für kleine Injektionsstärken das Nullte-Ordnungs-Problem [2] und bestimmen Sie aus den Fixpunkten den Punkt der Sattel-Knoten-Bifurkation
 - Stellen Sie die Bedingungen für eine Hopf-Bifurkation auf und bestimmen Sie diese ebenfalls analytisch.
- Erstellen Sie aus den Ergebnissen ein zwei-Parameter-Bifurkationsdiagramm (Injektionsfrequenz, Injektionsstärke) und vergleichen Sie die gewonnenen analytischen Ergebnisse mit dem tatsächlichen Verhalten (numerische Simulation) eines optisch injizierten Halbleiterlasers. [2, 4].

Literatur

- [1] S. Wieczorek, B. Krauskopf, T. Simpson, and D. Lenstra: *The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers*, Phys. Rep. **416**, 1 (2005).
- [2] T. Erneux and P. Glorieux: *Laser Dynamics* (Cambridge University Press, UK, 2010).
- [3] R. Adler: *A study of locking phenomena in oscillators*, Proc. IEEE **61**, 1380 (1973).
- [4] J. Pausch, C. Otto, E. Tylaite, N. Majer, E. Schöll, and K. Lüdge: *Optically injected quantum dot lasers - impact of nonlinear carrier lifetimes on frequency locking dynamics*, New J. Phys. **14**, 053018 (2012).

Projekt 9: Kohärenzresonanz in einem Halbleiterlaser mit optischer Injektion

Betreuer: Benjamin Lingnau (lingnau@mailbox.tu-berlin.de, EW629),
Kathy Lüdge (luedge@physik.tu-berlin.de, EW741)

Wird das Licht eines Lasers ("Master") in einen zweiten (Halbleiter-) Laser ("Slave") eingekoppelt, lässt sich reichhaltiges dynamisches Verhalten beobachten [1, 2, 3]. Bei bestimmten Werten des Parameterraums, der aus der Stärke der optischen Injektion und der Frequenzverstimmung zwischen Master- und Slave-Laser besteht, verhält sich der Laser wie ein anregbares System nahe einer SNIPER-Bifurkation [4]. Dann lässt sich im Laser, z.B. durch Rauschen, ein Intensitätspuls anregen. Ein vereinfachtes Modell des injezierten Lasers soll hier hinsichtlich des Auftretens von Kohärenzresonanz [5] untersucht werden.

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Leiten Sie aus den Lasergleichungen mit optischer Injektion das vereinfachte Modell her. Führen Sie eine Stabilitätsanalyse durch und klassifizieren Sie die auftretenden Bifurkationen.
- Vergleichen Sie numerisch die Dynamik des vereinfachten Systems und des ursprünglichen Lasermodells.
- Untersuchen Sie das vereinfachte Modell nahe der SNIPER-Bifurkation auf Kohärenzresonanz.

Literatur

- [1] S. Wieczorek, B. Krauskopf, T. Simpson, and D. Lenstra: *The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers*, Phys. Rep. **416**, 1 (2005).
- [2] J. Ohtsubo: *Semiconductor Lasers: Stability, Instability and Chaos* (Springer, Berlin, 2005).
- [3] T. Erneux and P. Glorieux: *Laser Dynamics* (Cambridge University Press, UK, 2010).
- [4] R. Aust, P. Hövel, J. Hizanidis, and E. Schöll: *Delay control of coherence resonance in type-I excitable dynamics*, Eur. Phys. J. ST **187**, 77 (2010).
- [5] B. Lindner, J. García-Ojalvo, A. Neiman, and L. Schimansky-Geier: *Effects of noise in excitable systems*, Phys. Rep. **392**, 321 (2004).