Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 18. Oktober 2012
http://www.itp.tu-berlin.de Direktzugang: 78850

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll,PhD
UE: Dipl.-Phys. Judith Lehnert

1. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi 31.10. 14:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.

Aufgabe 1 (10 Punkte): *Lotka-Volterra-Modell*
Mit den Lotka-Volterra-Gleichungen lassen sich Populationsdynamiken beschreiben. Hier betrachten wir die Wechselwirkungen zwischen einer Population von Schildläusen und Marienkäfer:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= rS - \alpha SM \\ \dot{M} &= -qM + \beta SM\end{aligned}$$

mit $r > 0$, $q > 0$, $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. S bzw. M beschreibt die Anzahl der Läuse bzw. Marienkäfer.

a) Kommentieren Sie die biologische Bedeutung der einzelnen Terme.

b) Finden Sie die Fixpunkte und charakterisieren Sie diese (stabil/instabil, Fokus/Sattel/Knoten). Gibt es Fälle, in denen die lineare Stabilitätsanalyse versagt?

c) Finden Sie eine Konstante der Bewegung $c(S, M)$, indem Sie durch Trennung der Variablen $\frac{dS}{dM}$ integrieren.

d) Skizzieren Sie den Phasenraum. Zeichnen Sie die Nullklinen und die Fixpunkte ein. Warum genügt es, den ersten Quadranten zu betrachten? Zeichnen Sie auch Höhenlinien ein, d.h. Linien konstanten $c(S, M) = c_o$ ein. Sie können gerne dafür den Computer verwenden. Zum Beispiel kann die Funktion VectorFieldPlot verwendet werden, um mit Mathematica Vektorfelder zu plotten. Die Funktion ContourPlot hilft bei den Höhenlinien. Die Parameter können Sie zum Beispiel wie folgt wählen: $\alpha = \beta = 0.01$, $r = 0.1$ und $q = 0.5$. Sinnvolle Werte für die Höhenlinien sind dann $c_0 = -1.3$, $c_0 = -1.4$ und $c_0 = -1.5$. Was können Sie nun über den Fixpunkt sagen, den Sie unter c) nicht vollständig bestimmen konnten?

e) Was passiert, wenn zur Bekämpfung der Läuseplage Insektizide eingesetzt werden? Betrachten Sie dafür ein leicht erweitertes Modell:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= rS - \alpha SM - kS \\ \dot{M} &= -qM + \beta SM - kM\end{aligned}$$

wobei $k > 0$ die Sterberate der Schildläuse und Marienkäfer bedingt durch den Insektizideinsatz ist. Wie verschieben sich die Fixpunkte? Nehmen Sie $r > k$ an. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 2 (10 Punkte): *Van-der-Pol-Oszillator*
Van der Pol untersuchte in den 30er Jahren einen harmonischen Oszillator mit einem nichtlinearen Dämpfungsterm

$$\ddot{x} + \kappa(x^2 - a)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (\kappa \geq 0).$$

Wenn $a > 0$ ist, verhält sich der Dämpfungsterm für große Amplituden wie eine Reibung, wechselt aber für kleine Amplituden das Vorzeichen und führt so zu Schwingungen mit endlicher Amplitude.

1. Schreiben Sie die Gleichung als System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung mit $y = \dot{x}$ und finden Sie die Fixpunkte und deren Stabilität.

2. Lösen Sie die Gleichungen numerisch für $\kappa = 1$, $\omega_0 = 1$ und 1000 verschiedenen a Werten aus $[-1, 1]$. Lassen Sie in jeder Simulation eine transiente Zeit verstreichen (ca. 100 Zeiteinheiten) und tragen Sie dann Maxima und Minima von x über den a Werten auf, um so ein Bifurkationsdiagramm zu erhalten.
   Plotten Sie ausserdem das Phasen-Portrait in der $(x,\, y)$-Ebene für $a = 0.1$, $a = 1$, $a = 2$. Erläutern Sie das Verhalten des Oszillators, wenn a verändert wird.