

3. Übungsblatt – Theoretische Physik IV – Statistik/Thermodynamik**Abgabe: Mittwoch** 14.11.2007 bis 15:00 in den Briefkasten (Altbau)**Aufgabe 5 (4 Punkte): Legendre-Transformation**Für konkave (oder auch konvexe) Funktionen $f(x)$ kann man die Legendre-Transformierte

$$\hat{f}(y) = x(y)y - f(x(y)) \quad \text{mit} \quad x(y) \quad \text{aus} \quad df = y dx \quad \text{definieren.}$$

- (a) Zeigen Sie, dass zweimaliges Anwenden der Legendre-Transformation auf $f(x)$, also $\hat{\hat{f}}(x)$ wieder zu $f(x)$ führt. Zeigen Sie dazu zunächst, dass $x = \frac{d\hat{f}}{dy}$ gilt.
- (b) Berechnen Sie explizit \hat{f} und $\hat{\hat{f}}$ von der Funktion $f(x) = ae^{bx}$ ($a, b > 0$). Skizzieren Sie $f(x)$ und $\hat{f}(y)$ für fest gewählte Parameter a und b .

Aufgabe 6 (8 Punkte): Vorurteilsfreie Schätzung für gezinkten WürfelGegeben sei ein Würfel dubioser Herkunft. Ein Kollege war sehr fleißig und hat nächtelang gewürfelt. Leider hat er vergessen, für jede mögliche Augenzahl eine separate Statistik zu machen, so dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i nach wie vor unbekannt ist.

- (a) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_i unter der Voraussetzung vorurteilsfreier Schätzung: Der Erwartungswert der Augenzahl ist bekannt und beträgt $\langle M^1 \rangle = 4,5$.
(Hinweis: Sie werden im Verlauf der Aufgabe auf eine Gleichung des folgenden Typs treffen:

$$4,5 = \frac{x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 6x^6}{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6}.$$

Es empfiehlt sich, diese Gleichung numerisch (z.B. mit dem Computeralgebraprogramm *Mathematica*) zu lösen.)

- (b) Leiten Sie allgemein (verallgemeinerte kanonische Verteilung) für die Shannon Information I folgende Beziehung her: $I(M) = \psi(\lambda_1, \dots, \lambda_m) - \sum_{\nu=1}^m \lambda_{\nu} \langle M^{\nu} \rangle$.
In welcher Weise hängt dies mit Aufgabe 5 zusammen?
- (c) Berechnen Sie mit Hilfe der Beziehung aus b) die Shannon-Information der Wahrscheinlichkeitsverteilung des gezinkten Würfels.

Aufgabe 7 (8 Punkte): Großkanonisches ideales GasGegeben sei ein monoatomares ideales Gas in einem Volumen V , bei dem die Wechselwirkungen der Atome untereinander vernachlässigt werden können. Die Anzahl N der Teilchen variiert durch Austausch mit der Umgebung.

- (a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{h^{3N} N!} \int_{R^{6N}} e^{-\beta(H_N(\xi_N) - \mu N)} d\xi_N \quad \text{wobei} \quad H_N(\xi_N) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{p_i^2}{2m}$$

- (b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varrho_N(\xi_N)$ im Phasenraum an.
- (c) Berechnen Sie die innere Energie U (mittlere Energie der Teilchen) und die mittlere Teilchenzahl $\bar{N} = \langle N \rangle$. Wie kann Aufgabe 5 bei der Berechnung der Mittelwerte helfen?

Bitte Rückseite beachten! →

Vorlesung

- Dienstag 10:15 Uhr – 11:45 Uhr im PN 203
- Donnerstag 8:30 – 10:00 im PN 203

Klausur: Donnerstag den 07.02.2008 von 09:00 – 11:00 Uhr im EW 201

Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in Dreiergruppen).
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

Sprechzeiten:

- Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD: Mittwoch: 14.30-15.30 im PN 735
- Dr. Kathy Lüdge: Donnerstag, 14–15 Uhr im PN 741, Tel: 23002
- Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Dienstag, 14–15 Uhr im EW 627/628, Tel: 27681
- Dipl.-Phys. Hartmut Lentz: Montag, 14–15 Uhr im EW 627/628, Tel: 27681

Tutorien:

- Mo 10:15-11:45 EW 731 Hartmut Lentz
- Di 8:30-10:00 EW 731 Hartmut Lentz
- Di 12:15-13:45 EW 229 Kathy Lüdge
- Mi 10:15-11:45 EW 184 Stefan Fruhner