

**4. Übungsblatt – Theoretische Physik IV – Statistik/Thermodynamik****Abgabe: Mittwoch** 21.11.2007 bis 15:00 in den Briefkasten (Altbau)**Aufgabe 8 (10 Punkte): Fermionen und Bosonen**

Wir betrachten ein quantenmechanisches System wechselwirkungsfreier Teilchen mit dem Ein-Teilchen-Energieniveau  $E_0$ . Ein Mikrozustand wird durch die Besetzungszahl  $n$  charakterisiert. Es gilt ( $n \in \{0, 1\}$ ) für Fermionen und ( $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ) für Bosonen.

- (a) Berechnen Sie die großkanonische Zustandssumme für Fermionen und Bosonen.  
(b) Wie lauten die mittleren Teilchenzahlen  $\langle n \rangle$  jeweils?

Alternativ kann man das System auch als eine Verteilung auf einem Fock-Raum (Summe von  $N$ -Teilchen-Hilberträumen) auffassen. Das heisst, das System habe die Einteilchen-Energieniveaus  $E_i (i = 1, \dots, \infty)$ , die jeweils mit  $n_i$  Fermionen oder Bosonen besetzt werden. Ein Fock-Zustand ist dann beschrieben durch  $|n_1, \dots, n_i, \dots\rangle$ .

- (c) Wie lautet auf diesem Raum der Hamiltonoperator?  
(d) Berechnen Sie in diesem Formalismus den Erwartungswert des Teilchenzahloperators  $\langle \hat{N} \rangle = \text{tr}(\hat{\rho} \hat{N})$   
(e) Zeichnen Sie die Besetzungswahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Energie für beide Teilchensorten.  
(f) Berechnen Sie die Shannon-Information  $I$ .

**Aufgabe 9 (10 Punkte): Spin im Magnetfeld**

Ein Teilchen mit Spin  $1/2$  befinde sich in einem äußeren Magnetfeld  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ . Die Wechselwirkungsenergie mit diesem beträgt

$$E(n) = -n\mu B \quad (n \in \{-1, 1\}),$$

wobei  $n = 1$  einen zu  $\mathbf{B}$  parallelen Spin- und  $n = -1$  einen antiparallelen Spinzustand bedeutet und  $\mu$  das Bohrsche Magneton ist. Die innere Energie  $U = \langle \hat{H} \rangle := \sum_n E(n)P_n$  sei bekannt.

- (a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_n$  ohne Verwendung irgendwelcher Informationsmaße.  
(b) Berechnen Sie die Entropie  $S(U) = -k_B I(P_i)$  ( $i=1;2$ ) für unser Teilchen.  
(c) Berechnen Sie die Innere Energie  $U(T)$  in Abhängigkeit von der Temperatur  $T$ . Kann  $T$  auch negativ werden? **Hinweis:** Die Temperatur ist definiert durch  $1/T = \partial S / \partial U$ .  
(d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_n$  erneut, diesmal mit Hilfe des Prinzips der vorurteilsfreien Schätzung unter Zuhilfenahme der Shannon-Information. Welcher Zusammenhang ergibt sich zwischen dem Lagrange-Multiplikator, der zur Nebenbedingung  $U = \langle \hat{H} \rangle$  gehört, und der Temperatur aus (c)?  
(e) Betrachten Sie nun eine große Anzahl  $N \gg 1$  solcher Spins in dem Magnetfeld. Zeigen Sie unter der Voraussetzung  $NP_n \gg 1$  den Zusammenhang

$$-NI_{\text{Shannon}}(P_{-1}, P_1) = \ln \left( \frac{N!}{(NP_{-1})!(NP_1)!} \right). \quad \text{Wie ist das zu interpretieren?}$$

**Bitte Rückseite beachten!** →

## Vorlesung

- Dienstag 10:15 Uhr – 11:45 Uhr im PN 203
- Donnerstag 8:30 – 10:00 im PN 203

**Klausur:** Donnerstag den 07.02.2008 von 09:00 – 11:00 Uhr im EW 201

## Scheinkriterien:

- Mindestens 50% der Übungspunkte (Abgabe in Dreiergruppen).
- Bestandene Klausur.
- Regelmäßige und aktive Teilnahme in den Tutorien.

## Sprechzeiten:

- Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD: Mittwoch: 14.30-15.30 im PN 735
- Dr. Kathy Lüdge: Donnerstag, 14–15 Uhr im PN 741, Tel: 23002
- Dipl.-Phys. Stefan Fruhner: Dienstag, 14–15 Uhr im EW 627/628, Tel: 27681
- Dipl.-Phys. Hartmut Lentz: Montag, 14–15 Uhr im EW 627/628, Tel: 27681

## Tutorien:

- Mo 10:15-11:45 EW 731 Hartmut Lentz
- Di 8:30-10:00 EW 731 Hartmut Lentz
- Di 12:15-13:45 EW 229 Kathy Lüdge
- Mi 10:15-11:45 EW 184 Stefan Fruhner