

10. Übungsblatt zur Theoretischen Festkörperphysik

Abgabe: bis Dienstag 10.07.2007 10:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 14 (20 Punkte): BCS Theorie des Supraleiters

In der VL wurde der BCS-Hamiltonian von Elektronen, die mittels Phononaustausch attraktiv wechselwirken, hergeleitet:

$$H_{BCS} = 2 \sum_k (E(k) - \mu) a_k^+ a_k - V \sum_{kk'} a_{+k'}^+ a_{-k'}^+ a_{-k} a_{+k}$$

Dabei gibt das Vorzeichen vor der Wellenzahl auch gleichzeitig den Spin (\pm) an. Ausgehend von einer gefüllten Fermikugel (neuer Vakuumzustand $|0\rangle$) wird ein neuer Grundzustand $|g\rangle$, der Cooperpaare enthält, konstruiert:

$$|g\rangle = \prod_k (u_k + v_k a_{+k}^+ a_{-k}^+) |0\rangle$$

Nun werden neue Teilchen (Bogolonen) gesucht, für die gilt: $b_k |g\rangle = 0$ und $b_{-k} |g\rangle = 0$. Diese erhält man durch die Bogoljubov-Transformation:

$$\begin{aligned} b_{+k} &= u_k a_{+k} - v_k a_{-k}^+, & b_{-k} &= u_k a_{-k} + v_k a_{+k}^+, \\ b_{+k}^+ &= u_k a_{+k}^+ - v_k a_{-k}, & b_{-k}^+ &= u_k a_{-k}^+ + v_k a_{+k}. \end{aligned}$$

- (a) Zeigen Sie das aus $\langle g|g\rangle = 1$, die Normierung $u_k^2 + v_k^2 = 1$ folgt.
- (b) Berechnen Sie $\langle g|H|g\rangle$
- (c) Zeigen Sie, daß die neuen Operatoren den Antikommutatorregeln von Fermioperatoren unterliegen: $[b_{+k}, b_{+k'}^+]_+ = [b_{-k}, b_{-k'}^+]_+ = \delta_{kk'}$, $[b_{+k}, b_{-k'}^+]_+ = 0$, $[b_{+k}^+, b_{-k'}^+]_+ = 0$.
- (d) Stellen Sie die Umkehrtransformationen auf ($a_k = \dots$).
- (e) Transformieren Sie den Hamiltonian in die Form $H = E_0 + H_1 + H_2 + H_3$, wobei E_0 keine Operatoren enthalten soll, H_1 nur $b^+ b$ Operatorpaare, H_2 die $b^+ b^+, b b$ Paare und H_3 die verbleibenden Viereroperatorterme.
- (f) Zeigen Sie: Variation von $E_0(v_k, u_k)$ nach v_k liefert: $2\epsilon(k) \frac{u_k v_k}{u_k^2 - v_k^2} = V \sum_{k'} u_k v_{k'} (= \Delta)$.
 (Beachte: v_k ist verknüpft mit u_k , daher $\delta E_0 = (\frac{\delta E_0}{\delta v_k} - \frac{\delta E_0}{\delta u_k} \frac{v_k}{u_k}) \delta v_k = 0$).
- (g) Folgern Sie: $H_2 = 0$.
- (h) Wandeln Sie H_1 mit dem Teilchenzahloperator $\hat{n}_k = b_k^\dagger b_k$ um in $H_1 = \sum_k \sqrt{\epsilon^2(k) + \Delta^2} \hat{n}_k$.
- (i) Skizzieren Sie den Vorfaktor $\sqrt{\epsilon^2(k) + \Delta^2}$ aus (h) als Funktion von k und interpretieren Sie das Ergebnis.

Dieser Aufgabenzettel muß und soll nur von Studenten bearbeitet werden die an keinem Projekt teilnehmen!