Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik

20. Juni 2007

Prof. Dr. A. Knorr
Dipl.-Phys. Frank Milde,
Dipl.-Phys. Marten Richter

www.itp.tu-berlin.de/tfp07.html

9. Übungsblatt zur Theoretischen Festkörperphysik

Abgabe: bis Dienstag 26.06.2007 10:15 Uhr in der Vorlesung.

Aufgabe 13 (10 Punkte): *Makroskopische Stromdichte*

Berechnen Sie die makroskopische Stromdichte in 2. Quantisierung.

1. *Mikroskopische Stromdichte*
Stellen Sie die Gleichung für die mikroskopische Stromdichte

$$\underline{j}(r) = -\frac{1}{2}\frac{e}{m_0}\sum_{1,2} a_1^+ a_2 e^{-i(\underline{k}_1-\underline{k}_2)\underline{r}} u^*_{\lambda_1 \underline{k}_1}(\underline{r})(\hbar\underline{k}_2 + \underline{p}) u_{\lambda_2 \underline{k}_2}(\underline{r}) + h.c.$$

auf. Betrachten Sie dazu die klassische Stromdichte

$$\underline{j} = \sum_i q_i \dot{\underline{r}}_i \delta(\underline{r} - \underline{r}') = \sum_i q_i \frac{p_i}{m_i}\delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

und machen Sie den Übergang zur 2. Quantisierung mittels Entwicklung nach Blochwellenfunktionen $\varphi_{\lambda\underline{k}}(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\underline{k}\underline{r}} u_{\lambda\underline{k}}(\underline{r})$.

2. *Makroskopische Stromdichte*
Die makroskopische Stromdichte erhält man nun durch Mittelung über eine Elementarzelle $\langle j\rangle_{ED}(\underline{r}) = \frac{1}{\Omega_0}\int\limits_{\Omega_0} d^3r'\,\underline{j}(\underline{r} - \underline{r}')$, wobei Ω_0 das Volumen der Elementarzelle ist. Betrachten Sie nur $\underline{k}$-Vektoren in der Nähe der Bandkante ($\underline{k}_1, \underline{k}_2 \to 0$). Führen Sie für $\underline{k}_1$ und $\underline{k}_2$ Schwerpunktskoordinaten ein. Machen Sie für den 2. Term eine Fallunterscheidung für Intra- und Interbandanteile und benutzen Sie folgende Identität:

$$\frac{1}{\Omega_0}\int\limits_{\Omega_0} d^3r'\, u^*_{\lambda_1\underline{k}_1}(\underline{r}')\frac{p}{m_0} u_{\lambda_2\underline{k}_2}(\underline{r}') = \begin{cases} -\frac{\hbar q}{m_0} + \frac{\hbar q}{m_\lambda}, \lambda_1 = \lambda_2 \\ i(\omega_{\lambda_1} - \omega_{\lambda_2})\frac{1}{\Omega_0}\int\limits_{\Omega_0} d^3r\, u_{\lambda_1,0}(\underline{r})\,\underline{r}\,u_{\lambda_2,0}(\underline{r}), \lambda_1 \neq \lambda_2 \end{cases}$$

Führen Sie das Dipolmoment $\underline{d}_{\lambda_1\lambda_2} = -\frac{e}{\Omega_0}\int d^3r\, u_{\lambda_1,\underline{k}_1=0}(\underline{r})\,\underline{r}\,u_{\lambda_2,\underline{k}_2=0}(\underline{r})$ ein.

3. *Interpretation*
Interpretieren Sie im Endergebnis

$$\langle \underline{j}\rangle_{ED} = -e\sum_{q,Q,\lambda} e^{-iQr}\frac{q\hbar}{m_\lambda} a^+_{\lambda,q+\frac{Q}{2}} a_{\lambda,q-\frac{Q}{2}} + \sum_{q,Q,\lambda_1,\lambda_2} e^{-iQr} i(\omega_{\lambda_1} - \omega_{\lambda_2})\underline{d}_{\lambda_1\lambda_2} a^+_{\lambda_1,q+\frac{Q}{2}} a_{\lambda_2,q-\frac{Q}{2}}$$

die Bedeutung von Intra- und Interbandtermen. Hierbei sind $Q = k_1 - k_2$ und $q = \frac{k_1+k_2}{2}$.

4. *Bonus* (4 Punkte Extrapunkte zusätzlich)
Beweisen Sie die oben angegebene Identität.

Dieser Aufgabenzettel muß und soll nur von Studenten bearbeitet werden die an keinem Projekt teilnehmen!