

## 9. Übungsblatt zur Allgemeinen Relativitätstheorie I

**Abgabe: Dienstag 08.07.08** vor der Übung

### **Aufgabe 1 (10 Punkte): *Sphärisch-symmetrische Lösung der Feldgleichungen mit kosmologischer Konstante und lichtartige Geodäten***

a) Bestimmen Sie die sphärisch-symmetrische Vakuumlösung der Einsteinschen Feldgleichungen

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}) + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

im Fall, dass die kosmologische Konstante  $\Lambda$  ungleich Null ist.

Benutzen Sie dazu den Ansatz einer statischen, sphärisch-symmetrischen Metrik

$$ds^2 = B(r)(dx^0)^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\Theta^2 + \sin^2\Theta d\phi^2).$$

Die nichtverschwindenden Komponenten des Ricci-Tensors lauten dann:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} \\ R_{11} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left( \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} \\ R_{22} &= -1 - \frac{r}{2A} \left( \frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} \\ R_{33} &= \sin^2\Theta R_{22}. \end{aligned}$$

b) Stellen Sie nun die Gleichungen für lichtartige Geodäten in dieser Lösung auf. Betrachten Sie dabei die Bahnebene  $\Theta = \frac{\pi}{2}$  und  $\dot{\Theta} = 0$ . Diskutieren Sie die Unterschiede zur Schwarzschildmetrik, d.h. der Lösung des gleichen Problems ohne kosmologische Konstante.

**Hinweise:** Benutzen Sie zur Bestimmung der Geodäten möglichst das Variationsverfahren, denn man erhält dann direkt die ersten Integrale der Bewegung. Letztendlich sollte man eine Differentialgleichung erster Ordnung in  $r$  erhalten. Die Bewegungsgleichung für die  $r$ -Komponente erhält man am einfachsten aus der Nebenbedingung der Geodätengleichung **ohne** Benutzung des Variationsverfahrens.