

-31- 13. Der Elektronenspin - Vervollständigung der QT

Motivation:

(i) bisher: Bahndrehimpuls mit $L = 0, 1, 2, \dots$ [s. Kap. 11.2/4]

Was bedeutet $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ für quantenmechan. Teilchen?

(ii) exp. Befunde:

(1) Stern-Gerlach Versuch
= anomale Zeeman-Effekt

(2) Feinstruktur von Atomspektren

→ Evidenz für
halbzahligen
Drehimpuls
= Spin!

13.1. Elektronen im konstanten Magnetfeld

• verfügbar! [wird später vervollständigt]

• e^- im em. Feld: s. Kap. 3.3b) mit $q = -e$ [hier: Konvention]
 $2m = m_e$

Hamiltonian:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Vektorpot.}}}{p + eA(r,t)} \right)^2 - \underbrace{e\varphi(r,t)}_{\substack{\uparrow \\ \text{skalares Pot.}}} \quad (13.1)$$

Konstantes Magnetfeld B :

$$\underline{B} = \text{rot } \underline{A} \text{ mit } \underline{A} = -\frac{1}{2} \underline{r} \times \underline{B} \quad (13.2)$$

Beweis: selber

$$\begin{aligned} \underline{B} &= -\frac{1}{2} \nabla \times (\underline{r} \times \underline{B}) \\ &= -\frac{1}{2} [(\underline{B} \cdot \nabla) \underline{r} - \underline{B} (\nabla \cdot \underline{r})] \\ &= -\frac{1}{2} (\underline{B} - 3\underline{B}) = \underline{B} \end{aligned}$$

in (13.1) →

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} - e\varphi(r,t) - \frac{e}{4m} \underbrace{p \cdot (\underline{r} \times \underline{B})}_{= (\underline{r} \times \underline{B}) \cdot p! \leftarrow \text{überlege: } e_i j + p_i x_j B_k \text{ d. } i=j} - \frac{e}{4m} (\underline{r} \times \underline{B}) \cdot p + \frac{e^2}{8m} (\underline{r} \times \underline{B})^2 \\ &= -(\underline{B} \times \underline{r}) \cdot p \\ &= -\underline{B} \cdot (\underline{r} \times p) = -\underline{B} \cdot \underline{L} \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{1L} + H_2 \\ \text{mit } H_0 &= \frac{p^2}{2m} - e\varphi(r,t) \quad \dots e^- \text{ im Potential} \\ \left. \begin{aligned} H_{1L} &= +\frac{e}{2m} \underline{B} \cdot \underline{L} \\ H_2 &= \frac{e^2}{8m} (\underline{r} \times \underline{B})^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots e^- \text{ im homogenen } \underline{B} \end{aligned} \quad (13.3)$$

Hilf

) Zeeman-Effekt

Führe ein: magnetisches Moment: $\underline{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \underline{L} = -\gamma_L \underline{L} = -\frac{\mu_B}{\hbar} \underline{L}$ (13.4)
mit $\gamma_L = \frac{e}{2m} \dots$ gyromagnet. Verhältnis, $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9.27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$

ev... Bohr'sches Magneton

24. Übung
2.7.08

Bem. (i) Bedeutung: $\underline{L} \hat{=}$ Ringstrom von e^- um Kern ⁻³²⁻

→ $\underline{\mu}_L$ charakt. erzeugtes magnet. Dipolfeld $\underline{B}_D$

(ii) $e < 0$ (13.4) $< 0 \rightarrow \underline{L} \parallel \underline{\mu}_L$

(iii) permanentes Moment → Paramagnetismus

→ Einstellungsenergie in $\underline{B}$: $H_{1L} = -\underline{\mu}_L \cdot \underline{B}$ (13.5)

Bem. (i) klassisch: $\underline{\mu}_L \parallel \underline{B}$... energetisch bevorzugt

(ii) QT: Energie-EW für H_{1L}

mit $\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \rightarrow H_{1L} = + \frac{\mu_B}{\hbar} L_z B$ (13.6)

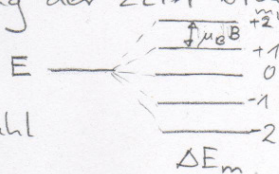
$L_z |l, m\rangle = m \hbar |l, m\rangle \rightarrow H_{1L} |l, m\rangle = \Delta E_m |l, m\rangle$

Drehimpuls-EV

mit $\Delta E_m = +\mu_B B m_L, m = -L \dots L$ (13.6)

... $\underline{B}$ hebt Richtungsentartung der $2L+1$ Drehimpulszustände auf
= Zeeman-Effekt

m_L ... magnetische Quantenzahl



(iii) Abschätzung:

$$\frac{\Delta E_m}{E_1(\text{H-Atom})} \approx \frac{\mu_B B}{R_y} \approx 10^{-5} \frac{B}{T} \ll 1 \quad \text{für } B \leq 100 \text{ T} \quad (13.7)$$

„verhält sich wie“ nicht erreichbar

... ΔE_m nur kleine Störung zu Energieniveaus im Atom

1) Diamagnetismus:

zweiter Term mit $\underline{B}$ in (13.3):

$$H_2 = \frac{e^2}{2m} (\underline{r} \times \underline{B})^2 = -\underline{\mu}_D \cdot \underline{B} \quad (13.8)$$

mit $\underline{\mu}_D = -\frac{e^2}{2m} \underline{r}_\perp^2 \underline{B}$... induziertes magnet. Moment

↑
Komp. von $\underline{r} \perp$ zu $\underline{B}$

Bem. (i) $\underline{\mu}_D \sim -\underline{B}$... Diamagnetismus $\approx a_B^2$

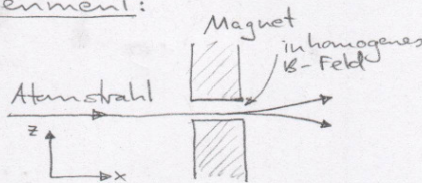
(ii) Abschätzung: $\frac{\langle H_2 \rangle}{\Delta E_m} \approx \frac{\frac{e^2}{2m} \langle r_\perp^2 \rangle B^2}{\mu_B B} \ll 1! \text{ für } B \leq 100$

... vernachlässige H_2 gegen H_{1L} !

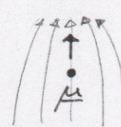
13.2. Experimenteller Nachweis des Spins ⁻³²⁻

1) Stern-Gerlach-Experiment:

• Versuchsaufbau:



• Energie von μ in $\underline{B}(\underline{r})$: $W = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}(\underline{r})$ (13.9) [Annahme: $\underline{B}(\underline{r})$ lokal fast homogen]
 Kraft auf μ : $\underline{F} = -\underline{\nabla} W$ $\frac{B_x, B_y \ll B_z}{\frac{\partial B_x}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial y} \ll \frac{\partial B_z}{\partial z}}$ $E = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} \hat{e}_z$ (13.10)



→ Aufspaltung in $2L+1$ Strahlen!
 [Richtungsquantisierung von μ !]

• Stern-Gerlach (1922):

Silberatome: kugelsymmetrische e^- -Hülle + „Leuchtelektron“ mit $L=0$

→ $\mu_z = 0$ → keine Aufspaltung erwartet

aber: 2 Strahlen = anomaler Zeeman-Effekt [Bahndrehimpuls: ungerade Zahl von Strahlen]

→ Drehimpuls zu $j=s=\frac{1}{2}$ mit $m_s = \pm \frac{1}{2} \hbar$?

kein Bahndrehimpuls! [nur ganzzahlig]

2) der Spin

→ Uhlenbeck und Goudsmit (1925):

e^- hat intrinsischen Drehimpuls = Spin $\underline{S}$ mit Spinquantenzahl $s=\frac{1}{2}$ und magnetischen Moment $\underline{\mu}_s = -g_s \frac{e}{2m} \underline{S}$ mit Landé-Faktor $g_s \approx 2$ [Unterschied zu L !!]

Wechselwirkungsenergie mit $\underline{B}$: $H_{1s} = -\underline{\mu}_s \cdot \underline{B}$ (13.12)

em: (i) Spin $\underline{S}$... zusätzliche Eigenschaft des e^-

Begründung durch Dirac-Gl. = relativ. Verallgemeinerung der SG

(ii) $g_s \approx 2$... aus Experiment

$g_s = 2$... aus Dirac-Gl.

$g_s = 2.0023$... aus QED

(iii) Proton, Neutron: auch Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen

Kern-Magneton: $\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} \approx 10^{-3} \mu_B$
 m_p = Masse Proton

$\left\{ \begin{array}{l} \mu_p = 5,58 \frac{\mu_K}{\hbar} \hat{S} \\ \mu_n = -3,82 \frac{\mu_K}{\hbar} \hat{S} \end{array} \right.$ (aufgrund ungleich. Ladungsverteilung)

13.3 Die Spin-Bahn-Kopplung -54-

- weiterer Hinweis für Spin: Feinstruktur der Atomspektren

E_{nl}  } Aufspaltung

Erklärung:

- (i) e^- "kreist" um pos. geladenen Atomkern mit $\mathbf{E}$ -Feld:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}), \quad V(\mathbf{r}) = -e \varphi(\mathbf{r}) \quad (13.13)$$

- (ii) Ruhesystem des e^- : Atomkern = Ringstrom um e^- , erzeugt bei e^-

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{a.B.}}{\approx} -\frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{p}}{m} = -\frac{1}{mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

also: $\mathbf{B} = -\frac{1}{mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{L}$ (13.14)

- (iii) Wechselwirkung von $\mathbf{S}$ mit $\mathbf{B}$:

$$\tilde{H}_{SB} \stackrel{(13.12)}{=} -\mu_s \cdot \mathbf{B} \stackrel{(13.14)}{=} \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = -\frac{e}{mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

strange Herleitung aus Dirac-Gl. $\rightarrow$ Faktor $\frac{1}{2}$

[Grund: Ruhesystem des $e^- \neq$ Inertialsystem!]

$$\rightarrow H_{SB} = -\frac{e}{2mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (13.15)$$

- Gesamt-Hamilton-Operator für e^- im homogenen $\mathbf{B}$ -Feld

$$H = H_0 + H_1 + H_{SB}$$

mit $H_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - e\varphi(r, t)$

$$H_1 = H_{1L} + H_{1S} = \frac{e}{2m} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} + 2\mathbf{S})$$

$$= \frac{e}{2m} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{S})$$

$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$... Gesamtdrehimpulsoperator

$$H_{SB} = -\frac{e}{2mc^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$$

(13.16)

... "Pauli-Hamilton-Operator"