Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 23. April 2008

Prof. Dr. Holger Stark http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvbs/quant/
Dr. Vasily Zaburdaev
Dipl. Phys. Sebstian Heidenreich Christin David
Dipl. Phys. Valentin Flunkert Christopher Wollin

2. Übungsblatt zur Theoretische Physik II Quantenmechanik

Abgabe: Montag 5.01. bis 12:00 in den Briefkasten
Achtung: Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!**

Aufgabe 4 (10 Punkte): *Hohlraumstrahlung*
Wie aus der Vorlesung bekannt ist, lautet die Planck'sche Formel für die spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung

$$u(\omega, T) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1},$$

wobei π, $\hbar$, c und k_B die üblichen Konstanten sind und ω, T die Kreisfrequenz bzw. die Temperatur bezeichnen. Leite ausgehend von der Planck'schen Strahlungsformel folgende Gesetze her:

1. Rayleigh-Jeans-Gesetz: Betrachte dazu den Grenzfall kleiner Frequenzen ($\hbar\omega \ll kT$).
Tipp: Verwende eine geeignete Talyor-Näherung für den Ausdruck $e^x - 1$.

2. Wien'sches Gesetz: Betrachte den Grenzfall großer Frequenzen ($\hbar\omega \gg kT$).

3. Wien'sches Verschiebungsgesetz: Bestimme aus dem Grenzfall großer Frequenzen aus 2. das Maximum der spektralen Energiedichte.

4. Stefan-Boltzmann-Gesetz: Berechne die Gesamtenergie U der Hohlraumstrahlung in Abhängigkeit von der Temperatur T

$$U(T) = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega.$$

Tipp: Verwende ggf. die Reihendarstellung der geometrischen Reihe.
Außerdem gilt $\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

5. Stelle die Lösung von 1. und 2. zusammen mit der Planck'schen Strahlungsformel grafisch dar.

Aufgabe 5 (10 Punkte): *Wellengleichung*
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung für das Anfangs-Randwert-Problem der eindimensionalen Wellengleichung mit Hilfe eines Separationsansatzes.

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

Randbedingung:

$$y(0,t) = 0, \;\; y(L,t) = 0$$

Anfangswerte:

$$y(x,0) = f(x), \;\; \frac{\partial y}{\partial t}(x,t)|_{t=0} = 0$$

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 6 (10 Punkte): *Probability density function (PDF)*
A characteristic function of a PDF $p(x)$ is defined as the Fourier transform of this PDF:

$$\phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p(x) dx.$$

1. Assume that all the moments of the PDF are existing and known. How by using the characteristic function can one reconstruct the PDF?

2. Consider the Gaussian PDF:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}.$$
Show that this PDF is normalized. Calculate its characteristic function.

3. With the help of the characteristic function find the n-th moment of Gaussian PDF: $\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx$.