Prof. Dr. Holger Stark http://www.itp.tu-berlin.de/menue/lehre/lv/ss08/pvbs/quant/
Dr. Vasily Zaburdaev
Dipl. Phys. Sebstian Heidenreich Christin David
Dipl. Phys. Valentin Flunkert Christopher Wollin

3. Übungsblatt zur Theoretische Physik II Quantenmechanik

Abgabe: Montag 12.05. bis 12:00 in den Briefkasten
Achtung: Unbedingt den eigenen Namen und Matrikelnr. sowie den Namen des Tutors und das Tutorium angeben. **Der Zettel wird sonst nicht korrigiert!**

Bei den schriftlichen Ausarbeitungen werden ausführliche Kommentare zum Vorgehen erwartet. Dafür gibt es auch Punkte!

Aufgabe 7 (10 Punkte): *3d-Potentialtopf*
Betrachten Sie ein quantenmechanisches Teilchen in einer dreidimensionalen Quantenbox, d.h. einem Würfel mit der Kantenlänge L. In der Box $(0 < x, y, z < L)$ genüge das Teilchen der freien Schrödingergleichung.
Behandeln Sie die Teilchenzustände mit Hilfe zweier Arten von Randbedingungen fuer die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$:

(i) $\psi(\mathbf{r}, t) = 0$ für $\mathbf{r}$ auf dem Rand des Würfels

(ii) periodische oder Born-von Karman Randbedingungen $\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r} + L\mathbf{e}_i, t)$ mit $i = x, y, z$.

1. Randbedingung (ii) lässt sich für die in der Vorlesung eingeführten ebenen Wellen erfüllen. Wie? Bestimmen Sie die Amplitude der ebenen Wellen aus der Normierung des Zustandes.

2. Randbedingung (i) erfordert eine neue Lösung der freien Schrödingergleichung.

   (a) Setzen Sie den Separationsansatz $\psi(\mathbf{r}, t) = g(t)\varphi(\mathbf{r})$ in die Schrödingergleichung ein und bestimmen Sie $g(t)$.

   (b) Bestimmen Sie Lösungen für $\varphi(\mathbf{r})$ in der Form $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)\varphi_3(z)$, die die Randbedingung (i) erfüllen. Normieren Sie die Lösungen.

3. Bestimmen Sie für beide Arten von Teilchenzuständen den Mittelwert des Ortes $\langle \mathbf{r} \rangle$ und die Unschärfe $\Delta r = \left[\langle \mathbf{r}^2 \rangle - \langle \mathbf{r} \rangle^2\right]^{1/2}$

Aufgabe 8 (10 Punkte): *Wahrscheinlichkeitsstrom im 1d-Potentialtopf*
In einem Potentialtopf gelte

$$i\hbar\partial_t\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\psi(x, t)$$

und

$$\psi(0, t) = \psi(L, t) = 0.$$

1. Zeigen Sie, dass die Funktionen

   $$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(k_n x)\, e^{-i\omega_n t},$$

   mit

   $$k_n = \frac{\pi n}{L}, \quad \omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = \frac{\hbar k_n^2}{2m}.$$

   Lösungen der Schrödingergleichung sind und die Randbedingungen erfüllen.
   Warum ist dann auch $\phi(x, t) = \sum_{n=1}^{N} c_n\, \psi_n(x, t)$ fuer $c_n \in \mathbb{C}$ eine Lösung der Schrödingergleichung?

2. Berechnen Sie nun für den Ansatz

$$\phi(x,t) = a\,\psi_1(x,t) + b\,\psi_2(x,t) \qquad (a,b \in \mathbb{R}, a^2+b^2=1)$$

die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\phi(x,t)|^2$ und die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$.

3. Plotten Sie beides für $a=b=1/\sqrt{2}$, $\hbar=1$, $m=1$ und $L=1$ als Funktion von x für ca. 10 verschiedene t Werte zwischen 0 und 0.43. (Alternativ können Sie auch eine Animation erstellen und per Email einreichen.)

4. Berechnen Sie mit Hilfe der Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte den Erwartungswert des Ortes $\langle x\rangle$.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Gaussian wave packet*
The Gaussian wave packet is defined by the integral

$$\psi(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}\overline{\psi}(p)e^{\frac{i}{\hbar}(px-Et)} \qquad (E=\frac{p^2}{2m}),$$

with

$$\overline{\psi}(p) = Ae^{-\frac{(p-p_0)^2}{4(\Delta p)^2}}.$$

1. By using the normalization condition $\int_{-\infty}^{+\infty}|\overline{\psi}(p)|^2dp = 1$, find the normalization constant A.

2. Compute the above integral and find the expression for $|\psi(x,t)|^2$ from the Lecture.
Hint: Bring the integrand in the form $\exp[-a(p-b)^2+c]$ *and use* $\int_{-\infty}^{\infty}dx\,\exp[-\alpha x^2] = \sqrt{\pi/\alpha}$*, valid for complex* α *with* $\mathrm{Re}\alpha > 0$.

3. Calculate the following averages:

$$\langle x(t)\rangle\,, \qquad \left\langle \triangle x(t)^2\right\rangle \equiv \left\langle (x-\langle x(t)\rangle)^2\right\rangle.$$